Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.1

13.10.2021

Esercizio 1. Sia K un campo qualsiasi.

(1) Supponiamo che in K valga la relazione $1+1+1=0$. Dimostrare che allora per ogni $a \in K$ vale $a+a+a=0$.
(2) Supponiamo che esista $b \in K$ tale che $b+b+b=0$. Vale anche in questo caso $a+a+a=0$ per ogni $a \in K$?

Esercizio 2. Calcolare le coordinate polari dei seguenti numeri complessi:

$$-2, \quad 4\pi i, \quad -\sqrt{3}+i, \quad 2-2i, \quad 3-3\sqrt{3}i,$$

cioè scriverli nella forma $\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ con $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Esercizio 3. Eseguire le seguenti divisioni con resto tra polinomi di $\mathbb{C}[x]$:

$$\begin{aligned}&(x^3+2x^2+1):(x^2+4),\\&(x^3+x):(x-i),\\&(x^5-1):(x^4+x^3+x^2+x+1),\\&(ix^3-3x+2i):(ix^2-1),\\&(x^4-2x^2+2):(x^2+1).\end{aligned}$$

Esercizio 4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, siano dati i polinomi $p_\alpha(z) = iz^2 + \alpha z + 2 \in \mathbb{C}[z]$.

(1) stabilire per quali valori di α si ha che $2-i$ è una radice di p_α.
(2) Per tali valori di α, determinare tutte le radici di p_α.
(3) Trovare infine per quali valori di α esiste un polinomio $q_\alpha \in \mathbb{C}[z]$ tale che $(q_\alpha)^2 = p_\alpha$.

Esercizio 5. Determinare le radici razionali dei seguenti polinomi a coefficienti interi:

$$\begin{aligned}&6x^3+13x^2+x-2,\\&4x^3-5x^2-8x+10,\\&3x^4-8x^3+8x^2-8x+5.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Trovare le radici del polinomio $p(x) = x^4-2x^3-5x^2+4x+6 \in \mathbb{R}[x]$.

Esercizio 7. Determinare i numeri complessi z tali per cui $|z|^2 - z + 4i = 0$.

Esercizio 8. Siano $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ le n radici complesse distinte dell'unità, con n intero ≥ 2. Verificare che valgono le relazioni

$$\begin{aligned}&\zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \ldots \cdot \zeta_n = (-1)^{n+1},\\&\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 9. Determinare le radici del polinomio $p = z^3 + i \in \mathbb{C}[z]$. Determinare, se esiste, un polinomio $q \in \mathbb{C}[z]$ tale che $p \cdot q \in \mathbb{R}[z]$.

Esercizio 10. Decomporre il polinomio $p = x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$ in fattori irriducibili. Come si decompone se lo si interpreta come polinomio in $\mathbb{C}[x]$?