Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Esame scritto

15.6.2022

Esercizio 1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali, si considerino i sottospazi

$$U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(-1) = 0\},$$
$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\},$$
$$W = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = p'(0) = 0\}.$$

Determinare una base per $Z = U \cap V$ e una base per $Z + W$. Qual è la dimensione di $Z \cap W$?

Soluzione esercizio 1. L'intersezione $Z = U \cap V$ consta di tutti e soli i polinomi p di grado ≤ 2 tali che $p(-1) = p(1) = 0$. Per il Teorema di Ruffini, essi sono della forma $p = a \cdot (x + 1)(x - 1)$ dove $a \in \mathbb{R}$. Quindi sono tutti multipli uno dell'altro, e una base di Z è data scegliendo ad esempio $a = 1$, ottenendo il polinomio $x^2 - 1$.

Un polinomio p appartiene a W se e solo se $p(0) = p'(0) = 0$ e p ha grado ≤ 2, quindi 0 deve essere una radice di p di molteplicità almeno 2. Questo implica che $p = bx^2$ con $b \in \mathbb{R}$. Analogamente a prima, una base è data dal polinomio x^2.

Un insieme di generatori per $Z + W$ allora è $\{x^2 - 1, x^2\}$. Questi due polinomi non sono uno multiplo dell'altro, quindi questo insieme è linearmente indipendente. Cioè una base di $Z + W$ è $(x^2 - 1, x^2)$.

Concludiamo $\dim(Z+W) = 2$, e sappiamo $\dim(Z) = 1$ e $\dim(W) = 1$. Dalla formula di Graßmann segue $\dim(Z \cap W) = 0$.

Esercizio 2. Sia $L_A \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'operatore lineare associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare lo spettro (cioè l'insieme degli autovalori) di L_A, e una base di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori per L_A.

Determinare poi, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ rispetto al prodotto hermitiano canonico costituita da autovettori per L_A.

Soluzione esercizio 2. Determiniamo lo spettro di L_A calcolando il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Le sue radici sono 1, i, $-i$, quindi questi sono gli autovalori di L_A.

Determiniamo ora gli autospazi. Quello di $\lambda = 1$, cioè $(\mathbb{C}^3)_1$, è dato risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base delle soluzioni, quindi una base dell'autospazio, è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora invece gli autovalori $\pm i$. I due autospazi corrispondenti, che denotiamo con $(\mathbb{C}^3)_{\pm i}$, sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} \mp i & -1 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 \\ 0 & 0 & \pm i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni hanno base data dal vettore
$$\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Più precisamente, intendiamo il vettore con $+i$ per l'autospazio $(\mathbb{C}^3)_i$, e il vettore con $-i$ per l'autospazio $(\mathbb{C}^3)_{-i}$.

Segue che una base di $\mathbb{C}^3$ fatta di autovettori di L_A è
$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

I prodotti Hermitiani canonici fra questi vettori sono:
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$
e
$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = i \cdot \overline{-i} + 1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0} = 0.$$
Quindi questa base è già ortogonale. Per renderla unitaria è sufficiente normalizzare i vettori, ottenendo la base
$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
Questi tre vettori sono ancora autovettori di L_A, perché sono stati ottenuti semplicemente rinormalizzando gli autovettori ottenuti prima.

Esercizio 3. Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare a coefficienti reali di 2 equazioni in 3 incognite:
$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + kz = k + 1. \end{cases}$$
Per i valori di k per i quali il sistema risulta essere compatibile, determinarne l'insieme delle soluzioni.

Soluzione esercizio 3. La matrice completa del sistema è
$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & k & k+1 \end{pmatrix}$$
Applichiamo l'algoritmo di Gauß: iniziamo scambiando le due righe, in modo che applicando l'algoritmo non dovremo dividere per k. Otteniamo la sequenza di matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & k+1 \\ k & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & k & k+1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & k-k(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & k & k+1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & -k^2 \end{pmatrix}$$
Se $1 - k^2 \neq 0$ allora questa matrice ha due pivot nelle due righe, e nessuno di essi è nell'ultima colonna. Il sistema pertanto è compatibile.

Le soluzioni si trovano come al solito lasciando l'ultima incognita come parametro "libero" $z = t$, e risolvendo dal basso verso l'alto. Otteniamo, per tutti i valori del parametro t, i seguenti valori di x e y:
$$(1-k^2)y + (1-k^2)t = -k^2$$
da cui
$$y = \frac{(1-k^2)t + k^2}{k^2 - 1}$$
e
$$x + k\frac{(1-k^2)t + k^2}{k^2-1} + kt = k + 1$$
da cui
$$x = \frac{k^2 - k - 1}{k^2 - 1}.$$

Supponiamo invece $1-k^2=0$, cioè $k=1$ oppure $k=-1$. Se $k=1$ allora la matrice dopo l'algoritmo di Gauß è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Anche questa matrice ha due pivot, ma uno dei due è sulla colonna dei termini noti. Quindi in questo caso il sistema non è compatibile.

Se $k=-1$ allora la matrice dopo l'algoritmo di Gauß è
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Anche questa matrice ha due pivot, ma di nuovo uno dei due è sulla colonna dei termini noti. Quindi anche in questo caso il sistema non è compatibile.