Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Esame scritto

24.1.2022

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e la corrispondente applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(1) Determinare gli autovalori di L_A, e una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di L_A.
(2) Determinare poi, se esiste, una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A.

Soluzione esercizio 1. Prima di tutto osserviamo che la matrice A è simmetrica, e ha entrate tutte in $\mathbb{R}$. Quindi possiamo considerare l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: grazie al Teorema spettrale, sappiamo A è diagonalizzabile, cioè esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di L_A. Grazie a questo fatto sappiamo che una base come richiesta dal punto (1) esiste sicuramente, e che si ottiene mettendo insieme basi di tutti gli autospazi di L_A.

Usiamo il solito metodo: calcoliamo il polinomio caratteristico (mettiamo, nella variabile x):

$$p_A(x) = \det(A - I_3x) = \begin{pmatrix} 4-x & -2 & -2 \\ -2 & 4-x & -2 \\ -2 & -2 & 4-x \end{pmatrix} = -x^3 + 12x^2 - 36x = -x(x^2 - 12x + 36)$$

Le radici di questo polinomio sono 0 e 6, quindi questi sono gli autovalori di L_A.

Ricordo un "trucco" visto a lezione con questo genere di matrici: si vede facilmente che la matrice

$$\begin{pmatrix} 4-6 & -2 & -2 \\ -2 & 4-6 & -2 \\ -2 & -2 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo perché ha tutte le righe uguali, quindi $\lambda = 6$ sarà sicuramente un autovalore. Questo non dice quali sono gli altri autovalori, ma intanto si può usare per controllare che il polinomio caratteristico trovato è corretto (se non si trova che 6 è una radice di p_A, allora si è fatto un errore calcolando p_A). Inoltre sapere che 6 è una radice si può usare anche per cercare di trovare altre radici, usando il Teorema di Ruffini.

Cerchiamo basi degli autospazi $(\mathbb{R}^3)_0$ e $(\mathbb{R}^3)_6$ con il solito metodo. Per l'autovalore 0, gli autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{pmatrix} 4-0 & -2 & -2 \\ -2 & 4-0 & -2 \\ -2 & -2 & 4-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Per risolverlo usiamo l'eliminazione di Gauß:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo: $z = t$, $y = z = t$, $x = \frac{1}{2}(y+z) = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ponendo $t = 1$ troviamo una base dello spazio delle soluzioni del sistema, quindi una base dell'autospazio $(\mathbb{R}^3)_0$ è formata dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lo stesso procedimento con l'autovalore 6 porta al sistema omogeneo

$$\begin{cases} -2x-2y-2z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \end{cases}$$

in cui le tre equazioni sono identiche, per cui basta considerarne una sola $-2x - 2y - 2z = 0$, che è equivalente a $x + y + z = 0$. Le soluzioni trovate con il solito metodo sono $y = s$, $z = t$, $x = -y - z = -s - t$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. Una base delle soluzioni si ottiene ponendo $s = 1$, $t = 0$ e poi $s = 0$, $t = 1$, cosa che fornisce i due vettori

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi (u, w) è una base dell'autospazio $(\mathbb{R}^3)_6$. Mettiamo insieme i vettori trovati: la terna (v, u, w) è una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di L_A, come richiesto dal primo punto.

Per il secondo punto dell'esercizio, ricordiamo che il Teorema spettrale in realtà dice ancora di più: esiste una base di $\mathbb{R}^3$ **ortonormale** (rispetto al prodotto scalare standard) e fatta di autovettori di L_A.

Osserviamo prima di tutto che v e u sono autovettori di autovalori diversi, e sono autovettori di un operatore autoaggiunto. Da questo sappiamo che v e u sono ortogonali (questo è anche facile da verificare direttamente). Stessa cosa per v e w. Invece u e w hanno stesso autovalore $= 6$, quindi nessuno ci assicura che siano ortogonali, e infatti non lo sono.

Usiamo il metodo di Gram-Schmidt con u e w. Questo rimpiazzerà w con una combinazione lineare w' di u e w, quindi w' sarà ancora nell'autospazio $(\mathbb{R}^3)_6$, e sarà ortogonale a u:

$$\begin{cases} u' &= u \\ w' &= w - \frac{\langle w, u' \rangle}{\langle u', u' \rangle} u' \end{cases}$$

Calcoliamo i prodotti scalari:

$$\langle w, u' \rangle = \langle w, u \rangle = (-1)(-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$$

e

$$\langle u', u' \rangle = \langle u, u \rangle = 2$$

da cui

$$w' = w - \frac{1}{2} u' = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}(-1) \\ 0 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto (v, u', w') è una base ortogonale fatta di autovettori di L_A. Ultimo passaggio: rendiamola ortonormale dividendo ciascun vettore per la sua norma:

$$\|v\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \qquad \|u'\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \|w'\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Otteniamo la base (v_0, u_0, w_0) ortonormale e fatta di autovettori di L_A, dove

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} v = \frac{\sqrt{3}}{3} v$$

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} u' = \frac{\sqrt{2}}{2} u'$$

$$w_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} w' = \frac{2\sqrt{6}}{6} w' = \frac{\sqrt{6}}{3} w'$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L\colon & \mathbb{R}[x]_{\le 2} & \to & \mathbb{R}[x]_{\le 2} \\ & p & \mapsto & (x-1)p' + x^2 p''. \end{array}$$

(1) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di L.
(2) Determinare una base dell'intersezione $\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)$.

Soluzione esercizio 2. Usiamo la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Calcoliamo la matrice di L in questa base (presa per dominio e codominio), calcolando le immagini dei vettori di questa base, le coordinate di queste immagini rispetto a questa base stessa, e mettendo i risultati come colonne.

Abbiamo

$$L(1) = (x-1) \cdot 1' + x^2 \cdot 1'' = 0,$$

$$L(x) = (x-1) \cdot x' + x^2 \cdot x'' = x - 1,$$

$$L(1) = (x-1) \cdot (x^2)' + x^2 \cdot (x^2)'' = (x-1) \cdot 2x + x^2 \cdot 2 = 4x^2 - 2x.$$

Le coordinate di questi vettori sono

$$F_{\mathcal{B}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\mathcal{B}}(x-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}}(4x^2 - 2x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(infatti ad esempio $4x^2 - 2x = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 4 \cdot x^2$). Troviamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

L'immagine di L è generata dai tre vettori trovati, quindi $0, x-1, 4x^2 - 2x$. Estraiamo da questa famiglia di tre polinomi una base di $\mathrm{Im}(L)$: prima di tutto possiamo scartare il polinomio nullo in quanto certamente superfluo. Rimangono $x-1$ e $4x^2 - 2x$, che sono linearmente indipendenti. Questo si vede facilmente osservando che non sono uno multiplo scalare dell'altro, o anche osservando che le loro coordinate sono due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$.

Quindi $(x-1, 4x^2 - 2x)$ è una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Troviamo una base del nucleo. Stiamo cercando i vettori le cui coordinate, mettiamo x, y, z, soddisfano

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $z = 0$, $y = 0$, x qualsiasi, per cui una base è data ad esempio dal vettore con coordinate $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, cioè il polinomio costante 1. Esso quindi è una base di $\ker(L)$.

Calcoliamo ora l'intersezione $\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)$. Usiamo di nuovo le coordinate dei vettori. Le coordinate dei vettori in $\mathrm{Im}(L)$ formano il sottospazio

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$, e le coordinate dei vettori in $\ker(L)$ formano il sottospazio

$$W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'intersezione $U \cap W$ è formata dai vettori di $\mathbb{R}^3$ che possiamo scrivere contemporaneamente come combinazioni lineari dei generatori di U e dei generatori di W. I coefficienti usati, mettiamo α, β, γ, devono soddisfare

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -\alpha - \gamma &= 0, \\ \alpha - 2\beta &= 0, \\ 4\beta &= 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Deduciamo che $U \cap W = \{O\}$, e quindi $\ker(L) \cap \operatorname{Im}(L)$ contiene solo il vettore nullo (=il polinomio costante nullo).

Infine, se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo, allora per definizione ha per base l'insieme vuoto.

Esercizio 3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice $A_k \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & k & k & 3k \\ 1 & k & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Trattandosi di una matrice 3×4, sappiamo già che il rango sarà ≤ 3. Risolviamo l'esercizio in due modi diversi: attraverso il procedimento di eliminazione di Gauß, oppure applicando il metodo degli orlati.

Se decidiamo di procedere con l'eliminazione di Gauß, dobbiamo prestare particolare attenzione a quali siano i primi coefficienti non nulli di ciascuna riga che otteniamo. I primi passi non sono complicati:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & k & k & 3k \\ 1 & k & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ 0 & k-k^2 & 0 & k-k^2 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}.$$

A questo punto un'applicazione ortodossa del procedimento di eliminazione richiede di sapere quale sia il coefficiente non nullo più a sinistra nella sottomatrice costituita dalle due righe e tre colonne in basso a destra. In effetti se $k - k^2$ si annulla, può essere il k nella posizione $(3,3)$ il coefficiente candidato a diventare un pivot.

Per evitare inutili complicazioni, possiamo portare avanti la procedura sotto l'ipotesi che $k - k^2 \neq 0$, e magari anche $k \neq 0$, e poi trattare i casi rimanenti a parte.

Benissimo: sotto l'ipotesi che valgano entrambe le disuguaglianze, o equivalentemente che $k \neq 0, 1$, l'ultima matrice scritta è in forma a gradini e ha tre pivot; pertanto, quando $k \neq 0, 1$, la matrice A_k ha rango 3. Per quanto riguarda il caso $k = 0$, si vede subito che la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1, essendo tutte le righe multiple della prima, che è non nulla. Infine, se $k = 1$ si ha

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, le prime due righe, non nulle, sono identiche, mentre la terza non ne è multipla. Il rango è allora 2. Ricapitolando, il rango di A_k è 1 se $k = 0$, 2 se $k = 1$ e 3 in tutti gli altri casi.

Proviamo adesso con il metodo degli orlati. Cerchiamo un coefficiente non nullo di A_k, ad esempio quello di posizione $(1,1)$. Tra i minori 2×2 che lo orlano, quello con il determinante più "facile" è quello le cui righe e colonne sono la prima e la terza. Abbiamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} = k.$$

Se $k \neq 0$, la matrice A_k ha quindi rango almeno 2. Il caso $k = 0$ può essere fatto a parte, come prima.

Sempre supponendo che $k \neq 0$, orliamo questo minore 2×2 non nullo in tutti i modi possibili. I minori 3×3 che si ottengono sono due. Il primo è:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & k & k \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \end{pmatrix} = -k \cdot (k-1)k = k^2(1-k),$$

dove abbiamo dapprima eseguito alcune manipolazioni per righe e poi sviluppato lungo la prima riga. Calcoliamo anche il secondo minore allo stesso modo, ottenendo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+2 \\ k & k & 3k \\ 1 & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & k & 2k-1 \end{pmatrix} = k^2(k-1).$$

Ricordate che stiamo supponendo che $k \neq 0$. I due minori si annullano entrambi quando $k = 1$, nel qual caso il rango di A_k è esattamente 2. In ogni altro caso, sempre sotto l'ipotesi che $k \neq 0$, il rango è 3.

Mi preme fare un'osservazione importante: il teorema degli orlati dice che se una matrice possiede un minore $k \times k$ non nullo, e tutti i minori $(k+1) \times (k+1)$ che lo orlano hanno determinante nullo, allora il rango della matrice è esattamente k. Tuttavia nulla ci viene garantito se il minore $k \times k$ ha determinante 0.

Per capire quale sia il problema, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 4. Il minore 2×2 costituito dalle prime due righe e colonne è la matrice nulla. Tutti i minori 3×3 che la orlano hanno determinante 0 (verificatelo da voi). Tuttavia, poiché il minore 2×2 dal quale siamo partiti ha determinante nullo, non possiamo concludere che il rango della matrice sia 2, e nemmeno ≤ 2, poiché abbiamo già osservato che è 4.

Molti di voi hanno scelto un minore 2×2 della matrice A_k senza preoccuparsi di calcolarne il determinante, e lo hanno poi orlato nei due modi possibili, calcolando il determinante delle matrici 3×3 così ottenute. In questo modo, però, non hanno ottenuto alcuna informazione sul rango di A_k, a meno di aver calcolato preventivamente il minore 2×2 di partenza e aver ristretto le loro considerazioni a quei valori di k che lo rendono non nullo.