Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Esame scritto

9.2.2022

Esercizio 1. Sia U il sottospazio generato dai seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Ponendo su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, si trovi una base di $U^\perp$.
(2) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U. Si calcoli la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (presa sia per il dominio sia per il codominio).

Soluzione esercizio 1. Osserviamo che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti (è facile vedere che non sono proporzionali), per cui (u_1, u_2) è una base di U. Sappiamo che in questo caso un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $U^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} \langle w, u_1 \rangle = 0, \\ \langle w, u_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Ponendo

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

otteniamo un sistema

$$\begin{cases} a - 2b = 0, \\ -b - c = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono proprio l'insieme $U^\perp$. Le soluzioni sono date da $c = t$, $b = -t$, $a = -2t$ per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$, e una base di $U^\perp$ è formata dal vettore ottenuto ponendo ad esempio $t = 1$, cioè

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice di π, dobbiamo prima di tutto trovare le immagini $\pi(e_1), \pi(e_2), \pi(e_3)$ dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Iniziamo con e_1. Per calcolare $\pi(e_1)$, dobbiamo scrivere e_1 come somma di un vettore di U e un vettore di $U^\perp$. Per farlo usiamo le due basi di U e $U^\perp$ che abbiamo. Cerchiamo coefficienti α, β, γ tali che $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w = e_1$, cioè

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione è

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = -\frac{1}{3}, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}$$

per cui abbiamo

$$e_1 = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in U} \underbrace{- \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U^\perp} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\in U^\perp}$$

Per definizione, la proiezione ortogonale di un vettore è si ottiene prendendo l'addendo che sta in U, e "scartando" quello che sta in $U^\perp$. Quindi

$$\pi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vediamo un modo alternativo per fare lo stesso conto. A lezione, abbiamo visto che la proiezione ortogonale di un vettore qualsiasi v sul sottospazio U è data dalla formula

$$\pi(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

ma **attenzione**: questo vale solo se la base (u_1, u_2) è **ortogonale**. Nel nostro caso la formula si può usare, ma è un po' scomoda perchè dovremmo prima ortogonalizzare (u_1, u_2) usando il metodo di Gram-Schmidt, e poi usare la formula per calcolare $\pi(e_1)$ usando la nuova base trovata.

Terzo modo per fare lo stesso conto. Osserviamo che l'addendo che sta in $U^\perp$, quello "scartato", è la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. In questo caso ci aiuta il fatto che $U^\perp$ ha dimensione 1, e w è una base. Quindi la proiezione ortogonale di un vettore v su $U^\perp$ si ottiene come la proiezione di v **sulla direzione di** w, per la quale abbiamo la solita formula:

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Chiamiamo questa proiezione $\widetilde{\pi}(v)$. Nel nostro caso abbiamo

$$\widetilde{\pi}(e_1) = \frac{\langle e_1, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} w = \frac{-2}{4+1+1} w = -\frac{1}{3} w = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

È uno dei vettori ottenuti col primo metodo, ed è proprio quello che abbiamo "scartato", invece che quello che ci interessava. Che ci facciamo? Basta sottrarre! Infatti $\widetilde{\pi}(e_1) = e_1 - \pi(e_1)$, da cui

$$\pi(e_1) = e_1 - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

che coincide col risultato del primo metodo.

In modo simile otteniamo:

$$e_2 - \pi(e_2) = \frac{\langle e_2, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} w = \frac{-1}{4+1+1} w = -\frac{1}{6} w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\pi(e_2) = e_2 - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

e infine

$$e_3 - \pi(e_3) = \frac{\langle e_3, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} w = \frac{1}{4+1+1} w = \frac{1}{6} w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\pi(e_3) = e_3 - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Avendo calcolato $\pi(e_1), \pi(e_2), \pi(e_3)$, dobbiamo scrivere le loro coordinate rispetto alla base presa per il codominio, cioè di nuovo la base canonica. Queste coordinate sono semplicemente i vettori stessi $\pi(e_1), \pi(e_2), \pi(e_3)$. Infine dobbiamo metterli come colonne di una matrice, ottenendo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice richiesta dall'esercizio. Qualche verifica facile per vedere se abbiamo sbagliato i conti:

(1) Si tratta di una matrice simmetrica, cioè π è autoaggiunto (rispetto al prodotto scalare standard): giusto, infatti a lezione abbiamo visto che le proiezioni ortogonali su sottospazi (rispetto a una dato prodotto scalare) sono autoaggiunte (rispetto a quel prodotto scalare).
(2) Si verifica facilmente che $Au_1 = u_1$ e $Au_2 = u_2$: giusto, perché u_1 e u_2 sono "già" nel sottospazio U, quindi devono essere uguali alle loro proiezioni.
(3) Si verifica facilmente che $Aw = O$: giusto, perché w è ortogonale a U, quindi la sua proiezione ortogonale **su** U deve essere nulla.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari nelle variabili x, y, z, e dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$S\colon \begin{cases} x + y + tz & = 1, \\ -2x \quad + \quad (-2t+1)z & = -2, \\ tx + (t+2)y + (2t+1)z & = 0 \end{cases}$$

(1) Si trovino i valori di t per cui S è compatibile.
(2) Si considerino tutti i valori di t per i quali S è compatibile. Per questi valori di t si trovino le soluzioni del sistema (dipendenti anche dal parametro t).

Soluzione esercizio 2. Proviamo a trattare il sistema come se t fosse un numero reale, e risolviamo usando il metodo di Gauß. È possibile che questo ci porti a fare passaggi che andrebbero bene per alcuni valori di t, ma sarebbero "proibiti" per altri valori di t, come ad esempio dividere per t: va bene se $t \neq 0$, non si può fare se $t = 0$. In quel caso dovremo separare le due situazioni: procedere normalmente supponendo che t non assuma i valori "problematici", e poi fare un ragionamento separato laddove t assume quei valori.

Scriviamo la matrice completa del sistema e applichiamo il metodo di Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ -2 & 0 & -2t+1 & -2 \\ t & t+2 & 2t+1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ t & t+2 & 2t+1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -t^2+2t+1 & -t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+2t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t(2-t) & -t \end{pmatrix}$$

Non abbiamo dovuto mai dividere per espressioni che rischiavano di essere zero, per cui questi passaggi sono validi per qualsiasi valore di t. La matrice ottenuta ha buone possibilità di essere a scalini, ma questo va analizzato in dettaglio perché potrebbe essere vero per alcuni valori di t ma non per altri.

Se $t(2-t) \neq 0$ allora la matrice è a scalini, con pivot 1, 2, $t(2-t)$. Non ci sono pivot nell'ultima colonna, quindi il sistema si può risolvere, cioè esistono soluzioni. Concludiamo: se $t \neq 0$ e $t \neq 2$ allora il sistema è compatibile. Le soluzioni si trovano come al solito:

$$z = \frac{-t}{t(2-t)} = \frac{1}{t-2}, \qquad y = \frac{1}{4-2t}, \qquad x = \frac{3}{4-2t}$$

Nell'espressione per z c'era t al numeratore e al denominatore, e l'abbiamo semplificato: tutto innocuo perché stiamo supponendo $t \neq 0$.

Analizziamo i due casi rimanenti. Se $t = 0$ allora la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche questa è a scalini, non ci sono pivot nell'ultima colonna, quindi il sistema è compatibile anche per $t = 0$. Troviamo le soluzioni. Qui, a differenza di prima, nel sistema corrispondente la z diventa "libera", e le soluzioni sono dunque

$$z = s, \qquad y = -\frac{s}{2}, \qquad x = \frac{s+2}{2}$$

per qualsiasi valore di $s \in \mathbb{R}$.

Se invece $t = 2$ allora la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Anche questa è a scalini, però stavolta c'è un pivot nell'ultima colonna, e il sistema non è compatibile.

In conclusione:

(1) Il sistema è compatibile per ogni t numero reale diverso da 2, incompatibile per $t = 2$.
(2) Per t diverso da 2 e anche diverso da 0 la soluzione è unica, ed è data da

$$x = \frac{3}{4-2t}, \qquad y = \frac{1}{4-2t}, \qquad z = \frac{-t}{t(2-t)} = \frac{1}{t-2}.$$

(3) Per $t = 0$ le soluzioni sono date da

$$x = \frac{s+2}{2}, \qquad y = -\frac{s}{2}, \qquad z = s$$

per qualsiasi valore di $s \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dati

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(1) Si trovino basi per tutti gli autospazi di L_A, e si determini se L_A è diagonalizzabile.
(2) Si trovino due autovettori v_1, v_2 di L_A tali che $v = v_1 + v_2$.

Soluzione esercizio 3. Usiamo il criterio di diagonalizzabilità per $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ visto a lezione:

(1) studiamo se il polinomio caratteristico si spezza in prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti in $\mathbb{R}$ (questo vuol dire che le radici "sono tutte reali"),
(2) e studiamo se le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori reali corrispondono.

Attenzione: perché il criterio sia applicabile vanno osservate/verificate **entrambe** queste condizioni! Il rischio è quello di dimenticarsi della prima.

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(x) = \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & 0 \\ -3 & 5-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (-x)(5-x)(2-x) - 2(-3)(2-x) =$$

$$(2-x)(x^2 - 5x + 6)$$

Le radici di $x^2 - 5x + 6$ sono 2 e 3, e vale $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ per cui

$$p_A(x) = (x-2)^2(3-x).$$

Questo polinomio è effettivamente prodotto di fattori di primo grado: il primo punto del criterio è soddisfatto. La molteplicità algebrica di 2 è 2, la molteplicità algebrica di 3 è 1.

Troviamo le molteplicità geometriche. L'autospazio $(\mathbb{R}^3)_2$ si trova risolvendo

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 2 & 0 \\ -3 & 5-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le tre equazioni sono $-2x + 2y = 0$, $-3x + 3y = 0$, $0 = 0$. L'ultima è superflua e le prime due sono proporzionali, entrambe equivalenti a $x - y = 0$. Le soluzioni dunque sono $z = s$, $y = t$, $x = y$ per s e t numeri reali qualsiasi. Una base delle soluzioni è data ponendo prima $s = 1$, $t = 0$, e poi $s = 0$, $t = 1$, ottenendo i due vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 quindi è 2.

L'autospazio $(\mathbb{R}^3)_3$ si trova risolvendo

$$\begin{pmatrix} 0-3 & 2 & 0 \\ -3 & 5-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le equazioni sono $-3x + 2y = 0$ (contata due volte) e $z = 0$, quindi le soluzioni sono date da $y = r$, $x = \frac{2r}{3}$ per qualsiasi r numero reale. Poniamo per comodità $r = 3$, e otteniamo una base dell'autospazio formata dal vettore

$$w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anche qui la molteplicità geometrica, che è 1, coincide con quella algebrica. Il criterio di diagonalizzabilità è soddisfatto, L_A è diagonalizzabile, e abbiamo anche trovato una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori: (w_1, w_2, w_3).

Per rispondere alla seconda domanda, scriviamo intanto v in termini degli autovettori trovati. Cerchiamo cioè a, b, c tali che

$$aw_1 + bw_2 + cw_3 = v.$$

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2c &= 1 \\ a + 3c &= 2 \\ b &= 1 \end{cases}$$

che ha per soluzione

$$a = -1, \qquad b = 1, \qquad c = 1.$$

Quindi

$$-w_1 + w_2 + w_3 = v.$$

Qui però sono coinvolti tre autovettori, e non due come richiesto dall'esercizio. E non è una semplice somma, c'è un coefficiente (il -1 davanti a w_1).

A questo punto bisogna ricordarsi che gli autospazi sono sottospazi vettoriali, e che w_1 e w_2 sono nello <u>stesso</u> autospazio $(\mathbb{R}^3)_2$. Segue che anche una loro combinazione lineare qualsiasi appartiene a $(\mathbb{R}^3)_2$, ed è autovettore di autovalore 2 se non è il vettore nullo.

Ora, $-w_1 + w_2$ non è il vettore nullo, quindi è anch'esso un autovettore di autovalore 2. Basta porre dunque

$$v_1 = -w_1 + w_2, \qquad v_2 = w_3$$

per ottenere i due autovettori cercati.