Esame di Geometria BAER
Appello del 21/1/2020 testo A

Cognome e Nome .... Firma ....

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare. Segnare in basso sul retro del foglio eventuali date nelle quali per VALIDI MOTIVI non si è disponibili per sostenere l'esame orale.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Sia U il sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si trovi una base ortonormale di $U^\perp$. (3 punti)

Soluzione: I vettori dei coefficienti delle due equazioni $v_1 = (1,2,0,1)^t$, $v_2 = (1,0,2,1)^t$ formano una base di $U^\perp$ (il sistema dice che ogni vettore di U è ortogonale a v_1 e v_2 e il complemento ortogonale ha dimensione due). Possiamo semplificare i conti prendendo $w_1 = 1/2(v_1 - v_2) = (0,1,-1,0)^t$, applichiamo Gram-Schmidt ai vettori w_1, v_1 e otteniamo il secondo vettore della base cercata

$$w_2 = v_1 - \frac{\langle w_1, v_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i due vettori hanno norma $\sqrt{2}$ e 2 rispettivamente, dividendoli per la loro norma otteniamo la base cercata.

(b) Si scriva la matrice canonica della proiezione ortogonale su U. (4 punti)

Soluzione: Visto che al punto precedente abbiamo già trovato una base ortonormale di $U^\perp$ cerchiamo la proiezione ortogonale $P_{U^\perp}$ su questo sottospazio, la proiezione su U sarà data da $P_U = I - P_{U^\perp}$ (questo perchè ogni vettore v si scrive in modo unico come somma di un vettore in U e un vettore in $U^\perp$ e questi due addendi sono, per definizione, le due proiezioni di v). Le colonne della matrice sono le proiezioni dei vettori della base canonica su $U^\perp$ che calcoliamo usando la formula (in cui i $\tilde{w}_i$ sono i normalizzati dei vettori trovati al punto precedente) $P_{U^\perp}(e_i) = \langle e_i, \tilde{w_1}\rangle + \langle e_i, \tilde{w_2}\rangle$. Facendo i conti si trova che la matrice A della proiezione su $U^\perp$ è

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la proiezione su U è $I - A$.

Un altro modo di trovare la matrice della proiezione ortogonale è prendere u_1, u_2 base qualsiasi di U, v_1, v_2 base qualsiasi di $U^\perp$ e trovare la matrice canonica dell'unica applicazione lineare f t.c $f(u_i) = u_i$, $f(v_i) = 0$ (vettore nullo).

La soluzione qui riportata per entrambi i punti della domanda serve a risparmiarsi il calcolo di una base di U e poi ortonormalizzarla, ma si può benissimo fare qualche calcolo in più, calcolare una base di U e procedere da quella.

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Si consideri la conica C di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y = 0$$

1. Si trovi l'equazione canonica di C. (4 punti)

   Soluzione: Scriviamo la matrice della conica

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Gli autovalori della parte principale sono $4, 2$*, il determinante di* A *è* $-11/4$*, quindi, per l'invarianza del determinante, il termine noto è* $-11/32$*, dunque l'equazione canonica è* $4X^2 + 2Y^2 - 11/32 = 0$

2. Si consideri $\mathcal{R} = (p_0; v_1, v_2)$ sistema di riferimento affine in cui C ha equazione canonica, e siano w_1, w_2 i vettori ottenuti ruotando di $\pi/3$ in senso antiorario rispettivamente v_1 e v_2. Si trovi l'equazione di C nel sistema di riferimento affine $\mathcal{R}' = (p_0; w_1, w_2)$. (3 punti)

   Soluzione: L'origine nei due sistemi di riferimento è la stessa, quindi il cambiamento di coordinate è un cambiamento di base in uno spazio vettoriale di dimensione 2*. La matrice di passaggio dalla base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ *alla base* $\widetilde{\mathcal{B}} = \{w_1, w_2\}$ *è la matrice*

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Quindi, se indichiamo le coordinate rispetto a $\mathcal{R}$ *con* (X, Y) *e quelle rispetto a* $\mathcal{R}'$ *con* $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$*, abbiamo*

   $$\begin{cases} X = \frac{1}{2}\widetilde{X} - \frac{\sqrt{3}}{2}\widetilde{Y} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\widetilde{X} + \frac{1}{2}\widetilde{Y}. \end{cases}$$

   e sostituendo nell'equazione canonica (quella nel riferimento $\mathcal{R}$*), troviamo*

   $$\frac{5}{2}\widetilde{X}^2 + \frac{7}{2}\widetilde{Y}^2 - \sqrt{3}\widetilde{X}\widetilde{Y} - \frac{11}{32} = 0$$

   (Si può anche moltiplicare la matrice della conica in forma canonica a destra per la matrice del cambiamento di riferimento e a sinistra per la sua trasposta).

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Date le rette

$$r_1 : \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Si verifichi che le rette sono sghembe (2 punti)

Soluzione: Risolvendo i sistemi troviamo equazioni parametriche per le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 5 - 3s \end{cases}$$

I parametri direttori non sono proporzionali, quindi le due rette non sono parallele. Affinchè le coordinate x, y delle due rette siano uguali si deve avere $t = -2/3$, $s = 4/3$ ma per questi valori le coordinate z sono diverse, quindi le due rette non si intersecano e sono sghembe. (Si poteva anche considerare il sistema formato dalle equazioni cartesiane delle due rette e vedere che il rango della matrice dei coefficienti è 3 (quindi le due rette non sono parallele) e quello della matrice completa è 4).

(b) Si trovi la distanza di r_1 da r_2 (3 punti)

Soluzione: Facendo il prodotto vettoriale dei vettori direttori delle due rette troviamo la direzione perpendicolare ad entrambe le rette $(4, 5, 3)^t$. I piani di equazione $4x+5y+3z+d = 0$ sono quindi tutti paralleli a entrambe le rette, e quello di equazione $\pi : 4x+5y+3z-5$ contiene la retta r_1. La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra un punto qualsiasi di r_2 e il piano π (è uguale alla distanza di π dal piano π' parallelo a π che contiene r_2, che è uguale alla distanza di un punto qualsiasi di π' da π). Usando la formula della distanza di un punto da un piano troviamo $d(r_1, r_2) = d((0, 0, 5), \pi) = \sqrt{2}$. Si può anche usare il fatto che se $\overrightarrow{v}$ è il vettore tra due punti qualsiasi di r_1 e r_2 la distanza tra r_1 e r_2 è pari alla lunghezza della proiezione di $\overrightarrow{v}$ sul sottospazio generato da un vettore ortogonale ad entrambe le rette. In questo esercizio, dove non si richiede la retta di minima distanza, questi metodi sono più rapidi e meno soggetti ad errori di calcolo rispetto al punto mobile, che tuttavia è comunque corretto.

(c) Si trovi, se esiste, una retta passante per $P \equiv (-3, 2, 9)$, incidente r_1 e r_2 (3 punti)

Soluzione: Se questa retta r esiste, allora è contenuta nel piano π_1 per P contenente r_1, poichè conterrà due punti di r: P ed il punto di incidenza con r_1. Stesso discorso si può fare per r_2, dunque la retta sarà intersezione dei piani π_1, π_2 per P contenenti rispettivamente r_1, r_2. Scrivendo il fascio ridotto con asse r_1 otteniamo $2x + (h + 1)y + hz + h - 4 = 0$, imponendo il passaggio per P troviamo $\pi_1 : 6x + 5y + 2z - 10 = 0$. A scopo di esempio, troviamo π_2 in un altro modo: è il piano contenente i punti P e i due punti di r_2 di coordinate $(0, 0, 5), (1, 1, 2)$. L'equazione è

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z - 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -10x - 5y - 5z + 25 = 0.$$

In questo caso usare il punto mobile è molto più complicato e significa trasformare un problema lineare in un problema di secondo grado. Probabilmente il modo più semplice di farlo è imporre la condizione di allineamento di tre punti: scrivendo le coordinate dei vettori applicati in P con vertice nei punti mobili delle due rette otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 + t & -2t - 2 & 2t - 10 \\ s + 3 & s - 2 & -3s - 4 \end{pmatrix}$$

Voglio usare il teorema degli orlati orlando l'elemento $1, 1$. Prima però devo controllare il caso in cui questo sia nullo. Questo significa $t = -5$, ma allora dobbiamo avere $s = -3$ e si vede che per questi valori il rango della matrice è comunque 2. Calcolando i determinanti dei due minori orlati otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3st + 7s + 4t - 4 = 0 \\ -5st - 5s - 10t + 10 = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per $3/5$ e sommandola alla prima otteniamo $4s - 2t + 2 = 0$ ossia $t = 2s + 1$, sostituendo nella prima e risolvendo troviamo $s = 0$ oppure $s = -3$. Questa seconda soluzione è il caso escluso in precedenza, dunque $t = 1, s = 0$ sono i parametri che sostituiti nelle equazioni delle rette danno i punti di incidenza della retta cercata.

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia). Dati

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Si consideri $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice canonica A. Si trovi la dimensione dell'intersezione $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. (1 punto)

   Soluzione: La matrice ha rango 4, quindi il nucleo è il sottospazio banale e l'intersezione con l'immagine è ancora il sottospazio banale.

2. Si determini se f è diagonalizzabile. (4 punti)

   Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p(x) = (2-x)\left[-x\det\begin{pmatrix} 5-x & 3 \\ -4 & -3-x \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -3-x \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -3 & 5-x \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right] = \\ = (2-x)\left[-x(x^2-2x-3) - 2(-3+3x) + (-8+4x)\right] = (2-x)(-x^3+2x^2+x-2) = \\ (2-x)^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

   Il solo autovettore con molteplicità algebrica maggiore di 1 è 2, calcolando il rango di $A - 2I$ vediamo che questo è due, dunque la molteplicità geometrica di 2 è $4 - 2 = 2$. Quindi ogni autovalore ha uguali molteplicità algebriche e geometriche, e la somma di queste è pari a 4, quindi A è diagonalizzabile.

3. Si trovino tre autovettori v_1, v_2, v_3 di f tali che $v = v_1 + v_2 + v_3$. (3 punti)

   Soluzione: Risolvendo i sistemi $(A - \lambda I)x = 0$ troviamo basi di ciascun autospazio:

$$E(2) = L\left[u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad E(1) = L\left[v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad E(-1) = L\left[w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

   Poichè A è diagonalizzabile, abbiamo $E(2) \oplus E(1) \oplus E(-1) = \mathbb{R}^4$ (la somma è diretta perchè gli autospazi sono sempre a due a due disgiunti, anche se questo non è molto rilevante per la soluzione dell'esercizio) quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si scrive (in modo unico) come somma di un vettore in ciascun autospazio. Concretamente

$$v = (u_1 + 3u_2) + v - w$$

   e l'addendo tra parentesi, essendo combinazione lineare di due autovettori associati a 2, è un autovettore associato a 2 (gli autospazi sono sottospazi vettoriali).