Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Test di autovalutazione n.2

11.12.2019

LEGGERE ATTENTAMENTE PRIMA DI ANDARE ALL'INIZIO DEL TEST ALLA PAGINA SUCCESSIVA.

Questo è un test da svolgere per verificare il livello di apprendimento. Non è valutato ai fini dell'esame. Le soluzioni saranno pubblicate sul sito del corso.

Tempo: **60 minuti**

Il test va svolto senza usare appunti né libri, senza consultarsi con altri, e *senza distrazioni.*

Vanno scritte soluzioni il più possibile *dettagliate*, spiegando anche brevemente perché si svolgono determinati conti, scrivendo esplicitamente da cosa si parte e cosa si ottiene alla fine. All'esame, esercizi svolti solo con conti senza spiegazioni *non ricevono alcun punteggio.*

Esercizio 1. Si consideri l'unico endomorfismo di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\9\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice canonica di f.
(b) Si trovino gli autovalori e gli autospazi di f
(c) Si spieghi per quale risultato teorico sappiamo che gli autospazi saranno ortogonali a due a due.

Soluzione:

a) Utilizzando la linearità calcoliamo

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\9\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

dunque la matrice canonica è la matrice

$$A = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 9 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

b) Sappiamo già che 1 è autovalore, calcoliamo $\det(A - xI)$ sviluppando lungo la prima riga:

$$p_f(x) = (2-x)(x^2 - 11x + 14) + 2(-2(2-x)) = (2-x)(x^2 - 11x + 10)$$

Quindi gli autovalori sono $1, 2, 10$. Sono tre autovalori distinti quindi la molteplicità geometrica di ognuno è 1. Dal testo sappiamo quindi che $E(1) = L[(2,1,-2)^t]$, risolvendo il sistema $(A - 2I)v = O$ troviamo che tutte le soluzioni sono proporzionali a $(1,0,1)^t$ che quindi genera $E(2)$ mentre un generatore di $E(10)$ è il vettore $(1,-4,-1)^t$.

(c) la matrice è simmetrica, quindi è diagonalizzabile e gli autospazi sono ortogonali a due a due.

Esercizio 2. Si consideri il piano π in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$2x + y + 3z - 1 = 0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= -t + 2\\ y &= 2t\\ z &= t + 1\end{cases}$$

(1) Si trovino equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale di r su π.
(2) Si trovino equazioni parametriche di tutte le rette che sono contenute nel piano π e che hanno distanza 2 da s.

Soluzione:

(1) La retta r ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z - 3 &= 0\\ y - 2z + 2 &= 0\end{cases}$$

ottenute sostituendo $t = z - 1$ nelle prime due equazioni parametriche. Troviamo il piano ρ contenente r e ortogonale a π: la sua equazione cartesiana sarà del tipo

$$a(x + z - 3) + b(y - 2z + 2) = 0$$

cioè

$$ax + by + (a - 2b)z - 3a + 2b = 0$$

e vanno trovati i coefficienti a, b, imponendo che questo piano sia ortogonale a π.

Otteniamo la condizione

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ovvero

$$2a + b + 3(a-2b) = 0, \qquad 5a - 5b = 0$$

ad esempio $a = 1, b = 1$. Troviamo allora l'equazione

$$x + y - z - 1 = 0$$

per il piano ρ. Dato che s è contenuta in π e in ρ, otteniamo le equazioni cartesiane seguenti della retta s:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 1 &= 0 \\ x + y - z - 1 &= 0 \end{cases}$$

(2) Sia s' una retta contenuta in π e tale che abbia distanza 2 da s. Osserviamo che s ed s' non sono sghembe (per definizione), quindi devono essere parallele, altrimenti avrebbero distanza 0.

La distanza fra s e s' è realizzata dalla distanza fra due punti $p \in s$, $p' \in s'$, tali che p è un punto qualsiasi di s (perché le rette sono parallele), poi il vettore $v = p - p'$ è ortogonale a s e a s', e ha lunghezza 2. Inoltre v appartiene al sottospazio vettoriale π_0 soggiacente a π, cioè v è ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Si può trovare v, o magari intanto la sua direzione, imponendo le condizioni di ortogonalità che abbiamo detto. Si possono però anche saltare questi conti: noi abbiamo già trovato un vettore w appartenente a π_0, ortogonale a s (quindi anche a s'), e ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: si tratta del vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

trovato per avere l'equazione cartesiana del piano ρ. Allora v è un multiplo di w, scelto in modo tale che abbia norma 2.

Abbiamo

$$\|w\| = \sqrt{3}$$

e un multiplo αw di w ha norma

$$\|\alpha w\| = |\alpha| \cdot \|w\| = |\alpha|\sqrt{3}$$

quindi imponiamo

$$|\alpha|\sqrt{3} = 2$$

ottenendo

$$\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Troviamo quindi due possibilità per v, che corrisponderanno a due rette distinte:

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$v_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Usiamo v_1 per trovare la prima delle due rette, chiamiamola s_1. Scegliamo un punto qualsiasi p di s, ad esempio

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(soddisfa chiaramente le equazioni di s). Allora il punto $p + v_1$ appartiene a s_1:

$$p + v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Un vettore direttore di s_1 è dato da un vettore direttore di s. Lo possiamo trovare facendo ad esempio il prodotto vettoriale dei coefficienti delle equazioni dei piani π e ρ:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & 2 & 1 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora s_1 ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -4t + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -5t + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ z = t - \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Invece, il punto $p + v_2$ è su s_2:

$$p + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ed s_2 ha lo stesso vettore direttore di s_1. Concludiamo che s_2 ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -4t - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -5t + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ z = t + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$