Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Test di autovalutazione n.1

7.11.2019

LEGGERE ATTENTAMENTE PRIMA DI ANDARE ALL'INIZIO DEL TEST ALLA PAGINA SUCCESSIVA.

Questo è un test da svolgere per verificare il livello di apprendimento. Non è valutato ai fini dell'esame. Le soluzioni saranno pubblicate sul sito del corso.

Tempo: **60 minuti**

Il test va svolto senza usare appunti né libri, senza consultarsi con altri, e *senza distrazioni.*

Vanno scritte soluzioni il più possibile *dettagliate*, spiegando anche brevemente perché si svolgono determinati conti, scrivendo esplicitamente da cosa si parte e cosa si ottiene alla fine. All'esame, esercizi svolti solo con conti senza spiegazioni *non ricevono alcun punteggio.*

Esercizio 1. Si considerino U, V sottospazi di $\mathbb{R}^4$, dove

$$U = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

e $W = \mathrm{Sol}(S)$ è il sottospazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S\colon \begin{cases} 3x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Trovare basi di U e W.
(b) Trovare una base di $U \cap W$.
(c) È possibile trovare un vettore v di $U + W$ che si scriva in due modi diversi come somma di un vettore di U e uno di W? Se sì, trovarne uno, cioè trovare $v \in U + W$, $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2, \quad u_1 \neq u_2, \quad w_1 \neq w_2$$

Se invece non è possibile, spiegare perché.

Esercizio 2. Sia S_t il seguente sistema di equazioni lineari, dipendente da un parametro t, nelle incognite x, y, z:

$$S_t\colon \begin{cases} x + (t-2)y + z & = & 4 \\ 2x + (t-4)y + (t+2)z & = & 5 \\ x - 2y + (t+1)z & = & 1 \end{cases}$$

(a) Si scriva quante soluzioni ha S_t (nessuna, una, infinite), al variare del parametro t.
(b) Si considerino solo i valori di t per cui S_t ha almeno una soluzione. Esiste un elemento di $\mathbb{R}^3$, non dipendente da t, che sia soluzione di S_t per *tutti* questi valori di t? Se sì, trovare un tale elemento, altrimenti spiegare perché non esiste.