Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Test di autovalutazione n.1

7.11.2019

ATTENZIONE QUESTA È LA VERSIONE DEL TEST CON LE SOLUZIONI, NON APRIRLA SE NON SI È GIÀ SVOLTO IL TEST.

Gli esercizi si possono svolgere in modi diversi, le soluzioni proposte non sono IL modo giusto di svolgere gli esercizi, ma solo uno dei modi possibili. Potete però usarle per verificare la correttezza delle vostre risposte.

Esercizio 1. Si considerino U, V sottospazi di $\mathbb{R}^4$, dove

$$U = L\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-6\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$$

e $W = \mathrm{Sol}(S)$ è il sottospazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S\colon \begin{cases} 3x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Trovare basi di U e W.
(b) Trovare una base di $U \cap W$.
(c) È possibile trovare un vettore v di $U + W$ che si scriva in due modi diversi come somma di un vettore di U e uno di W? Se sì, trovarne uno, cioè trovare $v \in U + W$, $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2, \quad u_1 \neq u_2, \quad w_1 \neq w_2$$

Se invece non è possibile, spiegare perché.

Soluzione:

a) Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -6\\ -2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

è due (la prima, terza e quarta riga sono proporzionali), quindi una base di U è costituita da una qualsiasi coppia di colonne (nessuna colonna è proporzionale alle altre).

Dalla prima equazione di S otteniamo $x_2 = 3x_1$ che sostituita nella seconda dà

$$4x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$$

Risolvendo per x_3 e ponendo $x_1 = s, x_4 = t$ troviamo che il vettore della soluzione parametrica di S è $(s, 3s, -4s - 2t, t)^t$ da cui, ponendo $s = 1, t = 0$ e poi $s = 0, t = 1$ otteniamo una base $(1, 3, -4, 0)^t, (0, 0, -2, 1)^t$.

b) Un qualsiasi vettore $u \in U$ si scrive

$$u = s\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+2t\\3t\\-2s-4t\\s+2t\end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Affinchè u sia nell'intersezione, dovrà essere in W dunque le sue componenti dovranno soddisfare il sistema S, quindi sostituendo dovremo avere:

$$\begin{cases} 3(s+2t) - (3t) = 0 \\ (s+2t) + (3t) + (-2s-4t) + 2(s+2t) = 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo $3s + 3t = 0$ e $s + 5t = 0$ che ammette solo la soluzione nulla, quindi $U \cap W$ è il sottospazio banale $\{0\}$.

c) Non è possibile perché l'intersezione $U \cap W$ contiene solo il vettore nullo dunque la somma di U e W è diretta (questo basta affinchè la risposta possa considerarsi corretta e completa). In effetti se $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ con $u_i \in U$, $w_i \in W$, allora $0 = u_1 - u_2 + w_1 - w_2$ da cui otteniamo $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. Il membro destro è un vettore di U, il membro sinistro un vettore di W, poiché sono uguali $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$.

Esercizio 2. Sia S_t il seguente sistema di equazioni lineari, dipendente da un parametro t, nelle incognite x, y, z:

$$S_t: \begin{cases} x + (t-2)y + z & = & 4 \\ 2x + (t-4)y + (t+2)z & = & 5 \\ x - 2y + (t+1)z & = & 1 \end{cases}$$

(a) Si scriva quante soluzioni ha S_t (nessuna, una, infinite), al variare del parametro t.

(b) Si considerino solo i valori di t per cui S_t ha almeno una soluzione. Esiste un elemento di $\mathbb{R}^3$, non dipendente da t, che sia soluzione di S_t per *tutti* questi valori di t? Se sì, trovare un tale elemento, altrimenti spiegare perché non esiste.

Soluzione:

a) La prima e la terza equazione di S_t sommate danno la seconda, che possiamo quindi eliminare. Inoltre sostituendo la terza equazione con la sua differenza con la prima, otteniamo il sistema equivalente per righe

$$S'_t: \begin{cases} x + (t-2)y + z = 4 \\ -ty + tz = -3 \end{cases}$$

che è incompatibile se $t = 0$, mentre ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro se $t \neq 0$: poniamo z come variabile libera $z = s$, allora ricaviamo la soluzione parametrica

$$\begin{cases} x = (1-t)s + \dfrac{6}{t} + 1 \\ y = s + \dfrac{3}{t} \\ z = s \end{cases}$$

b) Basta osservare che la soluzione parametrica dipende da t e non è possibile "eliminare" questa dipendenza. Più dettagliatamente, ipotizziamo l'esistenza di una soluzione

$$v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

indipendente da t, e ricordiamo che essa dovrebbe essere soluzione del sistema per ogni $t \neq 0$. Osserviamo che la seconda equazione del sistema S'_t si può riscrivere come $t(-y+z) = -3$, per cui vale sicuramente $-y_0 + z_0 \neq 0$ (visto che v_0 soddisfa le equazioni), e abbiamo

$$t = \frac{-3}{-y_0 + z_0}$$

Scegliendo ad esempio i due valori $t = 1$ e $t = 2$, avremmo contemporaneamente

$$1 = \frac{-3}{-y_0 + z_0}$$

e

$$2 = \frac{-3}{-y_0 + z_0}$$

che è impossibile.