Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.9

Esercizio 1. Determinare se le seguenti applicazioni $b_i \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono forme bilineari, e in caso affermativo calcolarne la matrice canonica.

(1)
$$b_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = 2xt - yz + 3yt$$

(2)
$$b_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = |x|^2 - yz$$

(3)
$$b_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = 3xy + yt$$

Soluzione esercizio 1. (1) L'applicazione b_1 è una forma bilineare. Infatti, calcoliamone i valori sulla base canonica:

$$b_1(e_1, e_1) = 0, \quad b_1(e_1, e_2) = 2, \quad b_1(e_2, e_1) = -1, \quad b_1(e_2, e_2) = 3,$$

Mettiamoli in una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -z + 3t \end{pmatrix} = 2xt - yz + 3yt$$

che è proprio l'espressione di b_1. Quindi

$$b_1(u, v) = u^t \cdot A \cdot v$$

e concludiamo che b_1 è una forma bilineare. Abbiamo già calcolato la sua matrice canonica A.

(2) L'applicazione b_2 non è una forma bilineare. Il fatto che la sua espressione contenga $|x|^2$ rende improbabile che lo sia: è facile trovare $x, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che $|\lambda x|^2 \neq \lambda |x|^2$, ad esempio $x = 1$ e $\lambda = -1$.

Vediamo meglio il ragionamento. Ricordiamo che se b_2 fosse una forma bilineare, avremmo

$$b_2(\lambda u, v) = \lambda b_2(u, v)$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliamo allora

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\lambda = -1$. Otteniamo

$$b_2(\lambda u, v) = |-1 \cdot 1^2|^2 - 0 \cdot 0 = 1$$

e

$$\lambda b_2(u, v) = -1 \cdot (|1^2|^2 - 0 \cdot 0) = -1$$

quindi $b_2(\lambda u, v) \neq \lambda b_2(u, v)$. Segue che b_2 in effetti non è una forma bilineare.

(3) Neanche b_3 è una forma bilineare. Anche se è data da un polinomio omogeneo di secondo grado, le variabili x e y (cioè due entrate del primo argomento) compaiono moltiplicate. Quindi probabilmente non sarà vero che $b(\lambda u, v) = \lambda b(u, v)$.

Scegliamo allora

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\lambda = 2$. Otteniamo

$$b_3(\lambda u, v) = 3 \cdot \lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot 0 = 12$$

e

$$\lambda b_3(u, v) = 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 6$$

quindi $b_3(\lambda u, v) \neq \lambda b_3(u, v)$. Segue che b_3 in effetti non è una forma bilineare.

Esercizio 2. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare. Dimostrare che esistono due forme bilineari $b_1, b_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che b_1 è simmetrica, b_2 è antisimmetrica, e tali che $b = b_1 + b_2$, cioè per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$b(u, v) = b_1(u, v) + b_2(u, v)$$

Dimostrare che b_1 e b_2 sono uniche con queste proprietà.

Soluzione esercizio 2. Sia A la matrice canonica di b, consideriamo $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t)$ e $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Allora

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = A$$

Siano b_1 e b_2 le forme bilineari di matrici canoniche rispettivamente A_1 e A_2. Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$, vale

$$b(u, v) = u^t \cdot A \cdot v = u^t \cdot (A_1 + A_2) \cdot v = \left(u^t \cdot A_1 + u^t \cdot A_2\right) \cdot v = u^t \cdot A_1 \cdot v + u^t \cdot A_2 \cdot v = b_1(u, v) + b_2(u, v)$$

Dimostriamo che b_1 e b_2 sono uniche. Siano b_3, b_4 forme bilineari tali che b_3 è simmetrica, b_4 è antisimmetrica, e vale $b = b_3 + b_4$. Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\frac{1}{2}(b(u, v) + b(v, u)) = \underbrace{\frac{1}{2}(b_1(u, v) + b_1(v, u))}_{=b_1(u,v)} + \underbrace{\frac{1}{2}(b_2(u, v) + b_2(v, u))}_{=0} = b_1(u, v)$$

La stessa formula vale con b_3 al posto di b_1 e b_4 al posto di b_2, e deduciamo che

$$b_1(u, v) = b_3(u, v)$$

cioè $b_1 = b_3$.

Infine

$$\frac{1}{2}(b(u, v) - b(v, u)) = \underbrace{\frac{1}{2}(b_1(u, v) - b_1(v, u))}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(b_2(u, v) - b_2(v, u))}_{=b_2(u,v)} + = b_2(u, v)$$

La stessa formula vale con b_3 al posto di b_1 e b_4 al posto di b_2, e deduciamo che

$$b_2(u, v) = b_4(u, v)$$

cioè $b_2 = b_4$.

Esercizio 3. Calcolare la matrice canonica della forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + x_1y_2 - y_1x_2 - 2y_1z_2 + 3z_1x_2 + z_1z_2$$

e calcolarne anche la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ data da

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La forma bilineare b è simmetrica? Antisimmetrica?

Soluzione esercizio 3. La matrice canonica si ottiene calcolando b sui vettori della base canonica. Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} b(e_1,e_1)=1, & b(e_1,e_2)=1, & b(e_1,e_3)=0, \\ b(e_2,e_1)=-1, & b(e_2,e_2)=0, & b(e_2,e_3)=-2, \\ b(e_3,e_1)=3, & b(e_3,e_2)=0, & b(e_3,e_3)=1 \end{array}$$

quindi la matrice canonica è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice rispetto a $\mathcal{B}'$ si ottiene calcolando b sui vettori della base $\mathcal{B}'$. Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} b(v_1',v_1')=1, & b(v_1',v_2')=-1, & b(v_1',v_3')=6, \\ b(v_2',v_1')=4, & b(v_2',v_2')=-3, & b(v_2',v_3')=-5, \\ b(v_3',v_1')=1, & b(v_3',v_2')=-9, & b(v_3',v_3')=-7 \end{array}$$

quindi la matrice di b rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

La matrice canonica non è né simmetrica né antisimmetrica, quindi b non è né simmetrica né antisimmetrica.

Esercizio 4. Sia $b\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ forma bilineare antisimmetrica non degenere. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}'=(v_1',v_2')$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice A' di b rispetto a $\mathcal{B}'$ è

$$A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Consideriamo la matrice canonica A di b. Sappiamo che A è antisimmetrica e invertibile, cioè

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

con $\det(A)=a^2\neq 0$. Segue che $a\neq 0$. Osserviamo che $b(e_1,e_2)=a=-b(e_2,e_1)$, dove (e_1,e_2) è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Poniamo

$$v_1'=e_1,\quad v_2'=\frac{1}{a}e_2$$

Allora

$$b(v_1',v_1')=b(e_1,e_1)=0,\quad b(v_1',v_2')=\frac{1}{a}b(e_1,e_2)=\frac{a}{a}=1$$

$$b(v_2',v_1')=\frac{1}{a}b(e_2,e_1)=\frac{-a}{a}=-1,\quad b(v_2',v_2')=\frac{1}{a^2}b(e_2,e_2)=0$$

per cui la matrice A' di b nella base $\mathcal{B}'$ è quella cercata.

Esercizio 5. Sia $b\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica. Dimostrare che, se n è dispari, allora b è degenere.

Soluzione esercizio 5. Sia A la matrice canonica di b. Sappiamo che A è una matrice antisimmetrica, cioè $-A^t$, e che è una matrice $n\times n$ dove n è dispari. Abbiamo già visto in un esercizio precedente che A non è invertibile, per cui b è degenere.

Esercizio 6. (difficile) Sia $b\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ forma bilineare non degenere. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, e sia W il sottospazio[1] di $\mathbb{R}^n$ formato da tutti i vettori w tali che

$$b(u,w)=0$$

per **ogni** $u\in U$. Dire, motivando la risposta, se è sempre vero che

$$U\oplus W=\mathbb{R}^n$$

(Ricordiamo che, se b è il prodotto scalare, allora $W=U^\perp$ e la formula $U\oplus U^\perp=\mathbb{R}^n$ è sempre vera.)

[1]Non si richiede di dimostrare che W è un sottospazio vettoriale.

Soluzione esercizio 6. Non è sempre vero. Infatti, abbiamo visto a lezione esempi di forme bilineari non degeneri b e vettori u tali che $b(u,u) = 0$. Ad esempio b di matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $u = e_1$, infatti $b(e_1, e_1) = 0$ e $\det(A) = -1 \neq 0$. Prendiamo questa b e questo u, e consideriamo $U = L[u]$, cioè U è l'insieme dei multipli di u.

Allora u è in W, perché $b(u, u') = 0$ per ogni multiplo u' di u. Infatti se $u' = \alpha u$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$b(u, u') = b(u, \alpha u) = \alpha b(u, u) = 0$$

Per cui

$$O \neq u \in U \cap W$$

e deduciamo che U e W non sono in somma diretta.

Esercizio 7. Calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale b ha matrice diagonale, tale che ciascun numero sulla diagonale è 1, oppure -1, oppure 0 (come nel Teorema di Sylvester).

Soluzione esercizio 7. Per trovare la segnatura, calcoliamo gli autovalori di A. Con il solito metodo del polinomio caratteristico si trovano gli autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 8$ e $\lambda = -3$. Abbiamo un autovalore positivo, uno negativo, e uno nullo (contati con la loro molteplicità geometrica, che è 1 in tutti e tre i casi), quindi la segnatura è $(1, 1, 1)$.

Una base in cui b ha matrice diagonale è una base ortogonale di autovettori di A. Con il metodo solito, si trovano gli autovettori

$$v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di autovalori rispettivamente 8, -3 e 0.

Questi autovettori sono già ortogonali, anche perché sono autovettori di una matrice simmetrica ed hanno autovalori diversi. Se avessimo avuto degli autospazi di dimensione maggiore di 1, **in ciascuno di essi** avremmo potuto usare Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base trovata.

Per avere una base in cui la matrice di b non sia solo diagonale, ma abbia sulla diagonale solo 1, -1 oppure 0, dobbiamo normalizzare i 3 vettori trovati, dividendoli per la loro norma. Poi dobbiamo dividere quelli che hanno autovalore non nullo per la radice quadrata del modulo dell'autovalore. Otteniamo

$$w_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\| \cdot \sqrt{|8|}} = \frac{v_1'}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{v_1'}{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\| \cdot \sqrt{|-3|}} = \frac{v_2'}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{v_2'}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{v_3'}{\sqrt{4+1+1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Una base come richiesto dall'esercizio quindi è $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$.

Esercizio 8. Trovare un cambiamento di variabili da x, y, z a x', y', z' tale che la forma quadratica[2]

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy - 2xz - y^2 - 4yz + 2z^2$$

si scriva, nelle variabili x', y', z', come

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$$

(Si richiede cioè di scrivere esplicitamente x', y', z' in funzione di x, y, z.)

Soluzione esercizio 8. La forma quadratica q è la forma quadratica associata alla forma bilineare b di matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Troviamo autovalori e autovettori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$$

Per trovare le radici, proviamo prima di tutto con i fattori del termine noto, che sono ± 1, ± 3, ± 9, ± 27. Sono radici del polinomio 3 e -3, e otteniamo

$$p_A(x) = -(x-3)^2(x+3)$$

Quindi abbiamo i due autovalori $\lambda = 3$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda = -3$ (con molteplicità algebrica 1). Dato che A è diagonalizzabile, avremo allora molteplicità geometrica 2 per l'autovalore $\lambda = 3$, e molteplicità geometrica 1 per l'autovalore -3.

La segnatura di b dunque è $(2, 1, 0)$. Perciò c'è una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ in cui b ha matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e, scrivendo x', y', z' le coordinate di un vettore v rispetto a $\mathcal{B}'$, abbiamo

$$q(v) = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$$

Ci viene richiesto di trovare esplicitamente il cambio di coordinate da x, y, z a x', y', z', quindi troviamo $\mathcal{B}'$.

Troviamo gli autovettori col solito metodo, ottenendo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di autovalori rispettivamente $3, 3, -3$. Gli autovettori v_1 e v_2 che abbiamo trovato, e che formano una base di $E(3)$, non sono ortogonali. Li ortogonalizziamo con Gram-Schmidt, ottenendo

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = v_2 - \frac{2}{2} v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poniamo anche $v_3' = v_3$. Allora (v_1', v_2', v_3') è una base ortogonale di autovettori. La ortonormalizziamo: dato che

$$\langle v_1', v_1' \rangle = 2, \quad \langle v_2', v_2' \rangle = 3, \quad \langle v_3', v_3' \rangle = 6,$$

otteniamo la base ortonormale

$$v_1'' = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2'' = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3'' = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

[2] Per comodità, scriviamo qui le forme quadratiche come funzioni di vettori riga, invece che vettori colonna. Si tratta sempre comunque di applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Per avere una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale b abbia matrice A', dobbiamo ancora prendere la base ortonormale di autovettori, e dividere ciascun vettore per la radice quadrata del modulo dell'autovettore (se quest'ultimo è non nullo). Otteniamo

$$w_1 = \frac{v_1''}{\sqrt{|3|}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{v_2''}{\sqrt{|3|}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{v_3''}{\sqrt{|-3|}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ la forma bilineare ha matrice A'.

A questo punto, consideriamo x, y, z come le coordinate di un vettore v qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica, cioè

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le coordinate x', y', z' di v rispetto alla base $\mathcal{C}$ si ottengono con il solito cambiamento di base. Scriviamo le coordinate vecchie in termini delle nuove, usando la matrice che esprime $\mathcal{C}$ in termini della base canonica, cioè la matrice

$$M = \mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} x &= \frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{3} + \frac{z'}{3\sqrt{2}} \\ y &= \frac{y'}{3} + \frac{\sqrt{2}z'}{3} \\ z &= -\frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{3} + \frac{z'}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

Usando queste formule e sostituendo x, y, z in

$$2x^2 - 4xy - 2xz - y^2 - 4yz + 2z^2$$

troviamo in effetti

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$$

Per esprimere invece x', y', z' in funzione di x, y, z usiamo l'inversa di M, perché abbiamo

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ora:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} x' &= \frac{x\sqrt{6}}{2} - \frac{z\sqrt{6}}{2} \\ y' &= -x + y - z \\ z' &= \frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{z}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Esercizio 9. Dimostrare che esistono due basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alle quali le forme quadratiche

$$q_1(x, y, z, t) = 2xy + y^2 + 2yt + z^2$$

e

$$q_2(x, y, z, t) = -x^2 - 2xt + \frac{5}{2}y^2 - yz + \frac{5}{2}z^2 - t^2$$

sono date dalla stessa formula, se per q_1 si usano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_1$, e per q_2 si usano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_2$.

Soluzione esercizio 9. La matrice della forma bilineare b_1 che ha forma quadratica associata q_1 è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_{A_1} = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

e ha radici 1, 2, -1, 0. La molteplicità geometrica di ciascun autovalore è almeno 1, e la loro somma non può essere più di 4. Quindi ogni molteplicità geometrica è uguale a 1. Deduciamo che la segnatura di b_1 è $(2, 1)$.

La matrice della forma bilineare b_2 che ha forma quadratica associata q_2 è

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_{A_2} = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$$

e ha radici 3, 2, -2, 0. La molteplicità geometrica di ciascun autovalore è almeno 1, e la loro somma non può essere più di 4. Quindi ogni molteplicità geometrica è uguale a 1. Deduciamo che la segnatura di b_2 è $(2, 1)$.

Per cui sia b_1 sia b_2 ammettono basi (eventualmente diverse) rispetto alle quali la loro matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, nelle nuove variabili (di nuovo, eventualmente diverse per q_1 e q_2), sia q_1 sia q_2 si scrivono come

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$$

Esercizio 10. (difficile) Sia q la forma quadratica data da

$$q(x, y, z) = 3x^2 - 4xy + 2xz + 3y^2 - 2yz + 4z^2$$

Dimostrare che esiste un numero reale R tale che, se un vettore v è tale che $q(v) = 1$, allora $\|v\| \leq R$.

Suggerimento: si possono usare le formule seguenti:

$$\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$$

e

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|$$

che valgono per ogni scelta di vettori $u, w \in \mathbb{R}^n$ ed $a \in \mathbb{R}$. (La prima si dimostra facilmente, calcolando esplicitamente $\|u + w\|^2 = \langle u + w, u + w \rangle$ e usando la disuguaglianza di Schwarz. La seconda segue facilmente dalla definizione di $\|u\|$ come radice quadrata di $\langle u, u \rangle$.)

Soluzione esercizio 10. La matrice della forma bilineare di q è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(x) = -x^3 + 10x^2 - 27x + 18$$

con radici 1, 3, 6. Quindi la segnatura di q è $(3, 0)$, e in una qualche base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la forma bilineare di q ha matrice uguale alla matrice identità.

Sia ora $v \in \mathbb{R}^3$, e supponiamo $q(v) = 1$. Se x', y', z' sono le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$, il valore di $q(v)$ è uguale a

$$q(v) = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

Dall'uguaglianza $q(v) = 1$ deduciamo

$$\begin{cases} (x')^2 & \leq & 1 \\ (y')^2 & \leq & 1 \\ (z')^2 & \leq & 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} |x'| & \leq & 1 \\ |y'| & \leq & 1 \\ |z'| & \leq & 1 \end{cases}$$

Calcoliamo ora la norma di v:

$$\|v\| = \|x'v_1 + y'v_2 + z'v_3\| \leq |x'| \cdot \|v_1\| + |y'| \cdot \|v_2\| + |z'| \cdot \|v_3\| \leq \dots$$

e vale anche

$$\dots \leq \|v_1\| + \|v_2\| + \|v_3\|$$

Quindi basta prendere $R = \|v_1\| + \|v_2\| + \|v_3\|$.