Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.9

28.11.2019

Esercizio 1. Determinare se le seguenti applicazioni $b_i\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono forme bilineari, e in caso affermativo calcolarne la matrice canonica.

(1)
$$b_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = 2xt - yz + 3yt$$

(2)
$$b_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = |x|^2 - yz$$

(3)
$$b_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = 3xy + yt$$

Esercizio 2. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare. Dimostrare che esistono due forme bilineari $b_1, b_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che b_1 è simmetrica, b_2 è antisimmetrica, e tali che $b = b_1 + b_2$, cioè per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ vale
$$b(u, v) = b_1(u, v) + b_2(u, v)$$
Dimostrare che b_1 e b_2 sono uniche con queste proprietà.

Esercizio 3. Calcolare la matrice canonica della forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da
$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + x_1y_2 - y_1x_2 - 2y_1z_2 + 3z_1x_2 + z_1z_2$$
e calcolarne anche la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ data da
$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
La forma bilineare b è simmetrica? Antisimmetrica?

Esercizio 4. Sia $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineare antisimmetrica non degenere. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice A' di b rispetto a $\mathcal{B}'$ è
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica. Dimostrare che, se n è dispari, allora b è degenere.

Esercizio 6. (difficile) Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare non degenere. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, e sia W il sottospazio[1] di $\mathbb{R}^n$ formato da tutti i vettori w tali che
$$b(u, w) = 0$$
per **ogni** $u \in U$. Dire, motivando la risposta, se è sempre vero che
$$U \oplus W = \mathbb{R}^n$$
(Ricordiamo che, se b è il prodotto scalare, allora $W = U^\perp$ e la formula $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$ è sempre vera.)

[1] Non si richiede di dimostrare che W è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 7. Calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale b ha matrice diagonale, tale che ciascun numero sulla diagonale è 1, oppure -1, oppure 0 (come nel Teorema di Sylvester).

Esercizio 8. Trovare un cambiamento di variabili da x, y, z a x', y', z' tale che la forma quadratica[2]

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy - 2xz - y^2 - 4yz + 2z^2$$

si scriva, nelle variabili x', y', z', come

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$$

(Si richiede cioè di scrivere esplicitamente x', y', z' in funzione di x, y, z.)

Esercizio 9. Dimostrare che esistono due basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alle quali le forme quadratiche

$$q_1(x, y, z, t) = 2xy + y^2 + 2yt + z^2$$

e

$$q_2(x, y, z, t) = -x^2 - 2xt + \frac{5}{2}y^2 - yz + \frac{5}{2}z^2 - t^2$$

sono date dalla stessa formula, se per q_1 si usano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_1$, e per q_2 si usano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 10. (difficile) Sia q la forma quadratica data da

$$q(x, y, z) = 3x^2 - 4xy + 2xz + 3y^2 - 2yz + 4z^2$$

Dimostrare che esiste un numero reale R tale che, se un vettore v è tale che $q(v) = 1$, allora $\|v\| \leq R$.

Suggerimento: si possono usare le formule seguenti:

$$\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$$

e

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|$$

che valgono per ogni scelta di vettori $u, w \in \mathbb{R}^n$ ed $a \in \mathbb{R}$. (La prima si dimostra facilmente, calcolando esplicitamente $\|u + w\|^2 = \langle u + w, u + w\rangle$ e usando la disuguaglianza di Schwarz. La seconda segue facilmente dalla definizione di $\|u\|$ come radice quadrata di $\langle u, u\rangle$.)

[2]Per comodità, scriviamo qui le forme quadratiche come funzioni di vettori riga, invece che vettori colonna. Si tratta sempre comunque di applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.