Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.8

Esercizio 1. Dimostrare che, se M è una matrice ortogonale, allora $\det(M)$ è 1 oppure -1.

Soluzione esercizio 1. Sappiamo che $M^{-1} = M^t$. Inoltre $\det(M^t) = \det(M)$, e $\det(M^{-1})$ è l'inverso di $\det(M)$. Concludiamo che

$$\det(M) = \det(M^t) = \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Quindi $\det(M)^2 = 1$. Gli unici numeri reali che al quadrato fanno 1 sono 1 e -1.

Esercizio 2.

(1) Siano $a, c \in \mathbb{R}$ due numeri tali che $a^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

è ortogonale e ha determinante uguale a 1.

(2) Viceversa, sia A matrice 2×2 qualsiasi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che A sia ortogonale, con $\det(A) = 1$. Dimostrare che allora $b = -c$ e $d = a$, e che $a^2 + c^2 = 1$.

Soluzione esercizio 2.

(1) Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = a^2 - (-c) \cdot c = a^2 + c^2$$

quindi $\det(A) = 1$. Allora la formula per l'inversa di A produce

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e otteniamo precisamente la trasposta di A.

(2) Dato che $\det(A) = 1$, abbiamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Visto che A è ortogonale, questa matrice deve essere uguale ad A^t, cioè

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Deduciamo che $a = d$ e che $b = -c$. Calcoliamo allora il determinante di A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2$$

Dato che $\det(A) = 1$, concludiamo che $a^2 + c^2 = 1$.

Esercizio 3. Consideriamo due vettori

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^n$, e sia M una matrice ortogonale $n \times n$. Usare la formula del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = u^t \cdot v$$

per dimostrare che

$$\langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle,$$

cioè moltiplicare per M due vettori colonna non cambia il loro prodotto scalare. (Suggerimento: può essere utile il fatto che la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte, ma con l'ordine invertito: $(AB)^t = B^t A^t$.)

Soluzione esercizio 3. Sappiamo che

$$M^{-1} = M^t$$

Allora abbiamo

$$\langle Mu, Mv\rangle = (Mu)^t \cdot (Mv) = u^t \cdot \underbrace{M^t \cdot M}_{=M^{-1}M=I} \cdot v = u^t \cdot v = \langle u, v\rangle.$$

Esercizio 4.
(1) Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, e supponiamo che $U \subseteq W$. Dimostrare che allora $U^\perp \supseteq W^\perp$.
(2) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che

$$\left(U^\perp\right)^\perp = U$$

(3) Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che, se

$$U^\perp = W^\perp,$$

allora $U = W$.

Soluzione esercizio 4.
(1) Sia $v \in W^\perp$. Dobbiamo dimostrare che $v \in U^\perp$, cioè che per ogni $u \in U$ abbiamo

$$\langle v, u\rangle = 0$$

Dato che $U \subseteq W$, sappiamo che u è anche un elemento di W. D'altronde sappiamo che v è ortogonale a tutti i vettori di W. Concludiamo che v è ortogonale anche a u.
(2) Dimostriamo innanzitutto che

$$\left(U^\perp\right)^\perp \supseteq U$$

Sia allora $u \in U$, e verifichiamo che $u \in \left(U^\perp\right)^\perp$. Sappiamo che $\left(U^\perp\right)^\perp$ è l'insieme di tutti i vettori ortogonali a $U^\perp$, quindi dobbiamo verificare che u è ortogonale a $U^\perp$. Ma questo è chiaro: ogni vettore di $U^\perp$ è ortogonale a tutti i vettori di U, quindi in particolare è ortogonale al vettore u.

Abbiamo dimostrato l'inclusione

$$\left(U^\perp\right)^\perp \supseteq U$$

Si tratta di due sottospazi, uno incluso nell'altro. Calcoliamone la dimensione:

$$\dim\left(\left(U^\perp\right)^\perp\right) = n - \dim\left(U^\perp\right) = n - (n - \dim(U)) = \dim(U)$$

Quindi i due sottospazi hanno la stessa dimensione. Segue che sono uguali.
(3) Usiamo la parte (2). Se $U^\perp$ è uguale a $W^\perp$, allora sono uguali i rispettivi complementi ortogonali, cioè

$$\left(U^\perp\right)^\perp = \left(W^\perp\right)^\perp$$

Ma questi sono rispettivamente U e W grazie alla parte (2), quindi concludiamo $U = W$.

Esercizio 5. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. Ricordiamo la formula della proiezione di un vettore v su w:

$$\mathrm{pr}_w(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

Il procedimento di Gram-Schmidt definisce la nuova base come

$$\begin{cases} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) \\ w_3 &= v_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(v_3) \end{cases}$$

Calcoliamo allora:

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2,$$

$$\langle v_2, w_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = -2 + 0 + 0 = -2$$

da cui deduciamo

$$w_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 + w_1$$

cioè

$$w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 0 + 3 + 0 = 3$$

Quindi

$$\mathrm{pr}_{w_1}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \frac{3}{2} w_1$$

Calcoliamo

$$\langle w_2, w_2 \rangle = (-1)^2 + (1)^2 + 2^2 = 6$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = 0 + 3 + 2 = 5$$

da cui segue

$$\mathrm{pr}_{w_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{5}{6} w_2$$

Concludendo:

$$w_3 = v_3 - \frac{3}{2} w_1 - \frac{5}{6} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} \\ 3 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6} \\ 1 - \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di U e una base ortonormale di $U^\perp$.

Soluzione esercizio 6. Troviamo prima di tutto una base di U. I quattro vettori u_1, u_2, u_3, u_4 generano U, ma potrebbero essere linearmente dipendenti. Usiamo l'algoritmo di Gauß sulla matrice che li ha per colonne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Scambiamo le prime due righe:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

e facciamo $R_3 \to R_3 - R_1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Facendo $R_3 \to R_3 - R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

e facendo $R_4 \to R_4 - 3R_3$ otteniamo infine

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è a scalini, con i tre pivot nelle prime tre colonne. Quindi u_4 è superfluo, e una base di U è fatta dai vettori u_1, u_2, u_3.

Possiamo renderla ortogonale con Gram-Schmidt. Poniamo

$$\begin{cases} w_1 &= u_1 \\ w_2 &= u_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(u_2) \\ w_3 &= u_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(u_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(u_3) \end{cases}$$

Troviamo $\mathrm{pr}_{w_1}(u_2) = \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$. Calcoliamo

$$\langle u_2, u_1 \rangle = 1, \qquad \langle u_1, u_1 \rangle = 2$$

quindi

$$\mathrm{pr}_{w_1}(u_2) = \frac{1}{2} u_1$$

e

$$w_2 = u_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo $\mathrm{pr}_{w_1}(u_3) = \frac{\langle u_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$. Abbiamo

$$\langle u_3, u_1 \rangle = 11,$$

quindi

$$\mathrm{pr}_{w_1}(u_3) = \frac{11}{2} u_1$$

Troviamo $\mathrm{pr}_{w_2}(u_3) = \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$. Abbiamo

$$\langle u_3, w_2 \rangle = -\frac{5}{2}, \qquad \langle w_2, w_2 \rangle = \frac{3}{2}$$

quindi

$$\mathrm{pr}_{w_2}(u_3) = -\frac{5}{3} w_2$$

Concludiamo

$$w_3 = u_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(u_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(u_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

L'esercizio richiede una base orto**normale**, che otteniamo dividendo w_1, w_2, w_3 per le loro rispettive norme:

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle} = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \|w_3\| = \sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle} = \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{3}}$$

Rimane da trovare una base ortogonale di $U^\perp$. Sappiamo che un vettore v è in $U^\perp$ se e solo se è ortogonale a un insieme di generatori di U, ad esempio u_1, u_2, u_3. Cioè $U^\perp$ è descritto dalle condizioni

$$\begin{cases} \langle v, u_1 \rangle & = & 0 \\ \langle v, u_2 \rangle & = & 0 \\ \langle v, u_3 \rangle & = & 0 \end{cases}$$

Ponendo

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -y - z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ -x - 4y - 7z + 6t & = & 0 \end{cases}$$

Sappiamo che U ha dimensione 3, quindi $U^\perp$ ha dimensione $4-3 = 1$. Infatti la matrice dei coefficienti del sistema è la matrice che ha u_1, u_2, u_3 per righe, quindi il suo rango è 3. Dobbiamo quindi trovare un solo vettore di $U^\perp$ (non nullo) per avere una base. Assegnando ad esempio $x = 1$ abbiamo $y = 1$, $z = -1$, e $-1 - 4 + 7 + 6t = 0$, cioè $t = -\frac{1}{3}$. Allora

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

è una base di $U^\perp$. Troviamo una base ortonormale dividendo v per la sua norma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

Esercizio 7. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Scrivere v come somma di un vettore di U e un vettore di $U^\perp$.

Soluzione esercizio 7. Sappiamo che esistono u, u' tali che $u \in U$, $u' \in U^\perp$, e

$$v = u + u'$$

Per definizione, il vettore u è la proiezione ortogonale di v su U, cioè

$$u = \mathrm{pr}_U(v)$$

Sappiamo calcolare facilmente $\mathrm{pr}_U(v)$ se abbiamo una base *ortogonale* di U, quindi applichiamo Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ di U (si vede facilmente che sono due vettori linearmente indipendenti):

$$\begin{cases} w_1 & = & u_1 \\ w_2 & = & u_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(u_2) \end{cases}$$

Calcolando w_2 come negli esercizi precedenti troviamo

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo applicare la formula

$$\mathrm{pr}_U(v) = \mathrm{pr}_{w_1}(v) + \mathrm{pr}_{w_2}(v)$$

Calcoliamo esplicitamente:

$$\mathrm{pr}_{w_1}(v) + \mathrm{pr}_{w_2}(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \frac{-1}{5} w_1 + \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{36}{5}} w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

e

$$u' = v - u = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D (entrambe 2×2) tali che

$$D = M^{-1} A M$$

Soluzione esercizio 8. Troviamo gli autovalori, e una base ortonormale di autovettori, per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ che ha A come matrice canonica. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 9 = x^2 - 2x - 8$$

Le radici sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. I due autospazi $E(-2)$ ed $E(4)$ hanno dimensione almeno 1, e siamo in $\mathbb{R}^2$, quindi entrambi hanno dimensione 1.

Troviamo due autovettori. Per $\lambda = -2$, cerchiamo $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (A + 2I)v = 0$$

cioè

$$\begin{cases} (1+2)x + 3y = 0 \\ 3x + (1+2)y = 0 \end{cases}$$

che è equivalente alla singola equazione $x + y = 0$. Segue che una base di $E(-2)$ è il vettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo stesso conto per $\lambda = 4$ produce la base di $E(4)$ data dal vettore (ad esempio)

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che v_1 e v_2 sono ortogonali, perchè sono autovettori di un endomorfismo simmetrico e hanno autovalori diversi. Rimane da ricavare una base ortonormale, dividendo per la loro norma. Otteniamo la base ortonormale di autovettori $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ dove

$$v_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Dire, motivando la risposta, se

(1) esiste un endomorfismo simmetrico $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori;

(2) esiste un endomorfismo simmetrico $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 9. (1) Sappiamo che gli autovettori di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali, **se i loro rispettivi autovalori sono diversi**. I due vettori v_1 e v_2 non sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2\rangle = 2 - 1 = 1$. Però nulla impedisce che siano autovettori con lo stesso autovalore. Ad esempio l'endomorfismo identità, che ha per matrice canonica la matrice identità

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è simmetrico, ha un solo autovalore $\lambda = 1$, e tutti i vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$ sono autovettori. Quindi anche v_1 e v_2. La risposta alla domanda perciò è "sì".

(2) Se f è un endmorfismo simmetrico, allora per ogni v, w vale $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$. Proviamo con v e w uguali ai due vettori di cui è assegnata l'immagine, cioè

$$v = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 4 + 2 = 5,$$

$$\langle v, f(w)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$

I due valori sono diversi, per cui una f con queste proprietà <u>non esiste</u>.

Esercizio 10. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo simmetrico che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

Soluzione esercizio 10. Troviamo gli autovalori di A trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \dots$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo:

$$\dots = (-x)\cdot \begin{vmatrix} -x & 0 & -1 \\ 0 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x)\cdot\big(-x^3 + 0 + 0 - (-x) - (-x) - 0\big) - \big(x^2 + 0 + (-1) - 0 - 1 - 0\big) +$$

$$+ \big(0 + 0 + 1 - 0 - (-1) - x^2\big) =$$

$$= x^4 - 4x^2 + 4$$

Con la formula delle radici dei polinomi di secondo grado si trova $x^2 = 2$ se $p_A(x) = 0$, quindi le radici di $p_A(x)$ sono $\lambda = \sqrt{2}$ e $\lambda = -\sqrt{2}$.

Troviamo gli autospazi. Per $E(\sqrt{2})$ troviamo, con il solito metodo, due generatori linearmente indipendenti, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e per $E(-\sqrt{2})$ troviamo ad esempio

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Quindi (v_1, v_2) è una base di $E(\sqrt{2})$, e (v_3, v_4) è una base di $E(-\sqrt{2})$.

Osserviamo che v_1 non è ortogonale a v_2, e inoltre v_3 non è ortogonale a v_4. Applichiamo Gram-Schmidt alle due basi trovate. Con la prima otteniamo

$$\begin{cases} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) \end{cases}$$

ed esplicitamente otteniamo

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Quindi (w_1, w_2) è una base ortogonale di $E(\sqrt{2})$. Per $E(-\sqrt{2})$:

$$\begin{cases} w_3 &= v_3 \\ w_4 &= v_4 - \mathrm{pr}_{w_3}(v_4) \end{cases}$$

e otteniamo

$$w_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e abbiamo che (w_3, w_4) è una base ortogonale di $E(-\sqrt{2})$. Inoltre sappiamo che vale

$$w_1 \perp w_3, \quad w_1 \perp w_4, \quad w_2 \perp w_3, \quad w_2 \perp w_4$$

perché in tutti e quattro i casi si tratta di due vettori che sono autovettori di autovalori diversi. Quindi (w_1, w_2, w_3, w_4) è una base ortogonale di autovettori per f.