Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.8

21.11.2019

Esercizio 1. Dimostrare che, se M è una matrice ortogonale, allora $\det(M)$ è 1 oppure -1.

Esercizio 2. (1) Siano $a, c \in \mathbb{R}$ due numeri tali che $a^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

è ortogonale e ha determinante uguale a 1.

(2) Viceversa, sia A matrice 2×2 qualsiasi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che A sia ortogonale, con $\det(A) = 1$. Dimostrare che allora $b = -c$ e $d = a$, e che $a^2 + c^2 = 1$.

Esercizio 3. Consideriamo due vettori

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^n$, e sia M una matrice ortogonale $n \times n$. Usare la formula del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = u^t \cdot v$$

per dimostrare che

$$\langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle,$$

cioè moltiplicare per M due vettori colonna non cambia il loro prodotto scalare. (Suggerimento: può essere utile il fatto che la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte, ma con l'ordine invertito: $(AB)^t = B^t A^t$.)

Esercizio 4. (1) Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, e supponiamo che $U \subseteq W$. Dimostrare che allora $U^\perp \supseteq W^\perp$.

(2) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che

$$\left(U^\perp\right)^\perp = U$$

(3) Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che, se

$$U^\perp = W^\perp,$$

allora $U = W$.

Esercizio 5. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di U e una base ortonormale di $U^\perp$.

Esercizio 7. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Scrivere v come somma di un vettore di U e un vettore di $U^\perp$.

Esercizio 8. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D (entrambe 2×2) tali che

$$D = M^{-1}AM$$

Esercizio 9. Dire, motivando la risposta, se

(1) esiste un endomorfismo simmetrico $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori;

(2) esiste un endomorfismo simmetrico $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo simmetrico che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.