Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.7

Esercizio 1. Dimostrare che una matrice A del tipo
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$
(dove $a, b, d \in \mathbb{R}$) è diagonalizzabile se e solo se $a \neq d$ oppure $b = 0$.

Soluzione esercizio 1. Dimostriamo che se $a \neq d$ oppure $b = 0$ allora A è diagonalizzabile. Se $b = 0$ allora A è diagonale, quindi abbiamo finito; rimane da esaminare il caso in cui $a \neq d$. Troviamo gli autovalori di A calcolando le radici del polinomio caratteristico. Abbiamo:
$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ 0 & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x)$$
quindi le radici sono $x = a$ e $x = d$. Sono due autovalori diversi di un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$: quindi A è diagonalizzabile.

Viceversa, supponiamo che A sia diagonalizzabile, e dimostriamo che $a \neq d$ oppure $b = 0$. Possiamo procedere "per assurdo", cioè supponiamo che quello che vogliamo dimostrare sia falso, e dimostriamo che allora A non poteva essere diagonalizzabile.

Cosa vuol dire assumere che "$a \neq d$ oppure $b = 0$" sia falso? Vuol dire assumere che $a = d$ <u>e anche che</u> $b \neq 0$.

Il calcolo degli autovalori di A è comunque quello di prima, e produce un solo autovalore $\lambda = a$ (perché stiamo supponendo $a = d$). Calcoliamo la dimensione di $E(a)$:
$$\dim(E(a)) = 2 - \mathrm{rg}(A - aI) = 2 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Visto che $b \neq 0$, il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è 1, per cui
$$\dim(E(a)) = 1.$$
Abbiamo cioè un solo autovalore, di molteplicità geometrica 1: non arriviamo a 2 che è la dimensione di $\mathbb{R}^2$, quindi A non poteva essere diagonalizzabile. Ma A era diagonalizzabile: abbiamo ottenuto un assurdo.

Per cui ci deve essere un problema con la nostra ipotesi "$a = d$ e anche $b \neq 0$". In altre parole, deduciamo che $a \neq d$, oppure $b = 0$.

Esercizio 2. Data una matrice quadrata A e un polinomio
$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0$$
definiamo $q(A)$ come la matrice seguente:
$$q(A) = c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_2A^2 + c_1A + c_0I$$
(le potenze di A sono calcolate col solito prodotto fra matrici). Sia A una matrice 2×2, e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Verificare che $p_A(A)$ è la matrice nulla.

Soluzione esercizio 2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
Allora
$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

Segue
$$p_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$$
Abbiamo
$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$
e quindi
$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)I &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo diagonalizzabile, con n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti diversi fra loro. Sia W la somma di tutti gli autospazi $E(\lambda_i)$ tali che l'autovalore corrispondente λ_i sia $\neq 0$. Dimostrare che $W = \mathrm{Im}(f)$.

Soluzione esercizio 3. Gli autospazi di f sono $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_n)$. Dato che non ci sono ripetizioni negli autovalori λ_i, non ci sono ripetizioni neppure negli spazi $E(\lambda_i)$.

Quindi la somma delle dimensioni di tutti gli autospazi è la somma
$$\dim(E(\lambda_1)) + \ldots + \dim(E(\lambda_n))$$
Sappiamo che questa somma è uguale a n, perché f è diagonalizzabile, e sappiamo che tutti gli autospazi hanno dimensione almeno 1. Ne consegue che tutti gli autospazi di questa f hanno dimensione 1.

Quindi possiamo scegliere, per ogni autospazio, una base fatta da un solo vettore. Otteniamo n vettori: $v_1, \dots, v_n$, di autovalori rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Sappiamo dalla teoria che $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, cioè quello che otteniamo mettendo insieme tutte le basi di tutti gli autospazi, è una base di $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, possiamo supporre che se c'è un autovalore nullo, allora lo scriviamo per ultimo. Infatti, se non è così, possiamo riordinarli in modo da mettere lo 0 per ultimo. Abbiamo dunque che W è generato da $v_1, \dots, v_{n-1}$, nel caso in cui abbiamo un autovalore nullo (allora è l'ultimo). Invece W è generato da $v_1, \dots, v_n$ se nessun autovalore è nullo.

Per comodità, scriviamo $m = n-1$ nel primo caso, e $m = n$ nel secondo. Quindi W è generato sempre da $v_1, \dots, v_m$. Abbiamo anche che, se $m = n$, allora W è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Dimostriamo che $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$. Se $m = n$ allora l'inclusione $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ è ovvia, perché $W = \mathbb{R}^n$. Supponiamo allora $m = n-1$.

Sia $u \in \mathrm{Im}(f)$, quindi esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v) = u$. Scriviamo v come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:
$$v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$$
Facciamo l'immagine:
$$u = f(v) = c_1f(v_1) + \ldots + c_nf(v_n) = c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}v_{n-1} + c_n\lambda_nv_n = \ldots$$
Visto che abbiamo supposto $m = n-1$, cioè $\lambda_n = 0$, abbiamo
$$\ldots = c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}v_{n-1}.$$
Questo vettore è in W, che è quello che volevamo dimostare.

Dimostriamo ora che $\mathrm{Im}(f) \supseteq W$. Sia $w \in W$, cioè w è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$. Quindi esistono coefficienti $a_1, \dots, a_m$ tali che
$$w = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m$$
Dobbiamo dimostrare che $w \in \mathrm{Im}(f)$, cioè che esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v) = w$. Per trovarlo, sfruttiamo il fatto che $f(v_i) = \lambda_iv_i$, e che $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono tutti diversi da 0. Per ottenere w basta allora prendere
$$v = \frac{a_1}{\lambda_1}v_1 + \ldots + \frac{a_m}{\lambda_m}v_m$$
Infatti
$$f(v) = \frac{a_1}{\lambda_1}f(v_1) + \ldots + \frac{a_m}{\lambda_1}f(v_m) = \frac{a_1\lambda_1}{\lambda_1}v_1 + \ldots + \frac{a_m\lambda_m}{\lambda_m}v_m = w$$

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Soluzione esercizio 4. L'insieme $E(0)$ è l'insieme degli autovettori di autovalore 0 (cioè dei $v \neq O$ tali che $f(v) = 0 \cdot v$) con in più il vettore nullo O. Osserviamo che vale anche $f(O) = 0 \cdot O$. Quindi per ogni $v \in E(0)$ vale $f(v) = 0 \cdot v$.

Viceversa, se un vettore qualsiasi $w \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $f(w) = 0 \cdot w$, allora w è un autovettore di autovalore 0, oppure $w = O$.

In altre parole, possiamo dire che $E(0)$ è l'insieme di tutti i vettori w tali che $f(w) = 0 \cdot w (= O)$. Ma questo insieme è il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$, quindi

$$\dim(E(0)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

D'altronde sappiamo che

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

da cui deduciamo l'uguaglianza richiesta

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Esercizio 5. Trovare, scrivendone la matrice canonica, un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano una base dell'autospazio $E(-3)$.

Soluzione esercizio 5. Osserviamo che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi in particolare $E(-3)$ deve avere dimensione 2.

Possiamo intanto scrivere la matrice di f rispetto a una base di nostra scelta. Dato che sappiamo cosa deve fare f con v_1 e v_2, completiamoli ad una base di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio aggiungendo e_1, il primo vettore della base canonica. Si verifica facilmente che v_1, v_2, e_1 sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_1)$ è una base.

Scegliamo la matrice di f in questa base, in modo che f sia come richiesta dall'esercizio. Sappiamo che deve valere $f(v_1) = -3v_1$, e che $f(v_2) = -3v_2$. Siamo invece liberi di scegliere $f(e_1)$, però e_1 non dev'essere un autovalore di autovettore -3, altrimenti l'autospazio $E(-3)$ avrebbe dimensione 3, e non 2.

La cosa più semplice è mettere $f(e_3) = O$. Allora la matrice di f nella base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice canonica di f, cioè la matrice di f nella base canonica, dobbiamo trovare la matrice M del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Cioè dobbiamo scrivere i vettori della base canonica in termini di quelli di $\mathcal{B}$. Si trova facilmente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot e_1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 2 \cdot e_1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 3 \cdot e_1,$$

I coefficienti, messi in colonna, formano la matrice di passaggio M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice canonica di f è

$$A' = M^{-1}AM$$

L'inversa di M è

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Rimane un'ultima verifica da fare. Abbiamo costruito f in modo che abbia almeno due autovettori, v_1 e v_2, linearmente indipendenti di autovalore $\lambda = -3$, e abbiamo scelto l'immagine del terzo vettore e_1 un po' a caso, facendo solo attenzione che e_1 non sia anch'esso un autovettore di autovalore -3.

Dobbiamo però essere sicuri che l'autospazio $E(-3)$ non sia più grande del dovuto. Per questo, basta calcolare il rango della matrice

$$A' - (-3) \cdot I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1, quindi la dimensione di $E(-3)$ è uguale a $n - 1 = 3 - 1 = 2$. Allora siamo sicuri di aver trovato una f come richiesto dall'esercizio.

Esercizio 6. Dimostrare che non esiste alcun endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 2, e i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 3.

Soluzione esercizio 6. Prima di tutto osserviamo che, se esistesse f con le proprietà richieste, l'intersezione $E(2) \cap E(3)$ conterrebbe solo il vettore nullo.. Infatti se avessimo un vettore non nullo in questa intersezione, esso sarebbe un autovettore di autovalore 2 *e anche* di autovalore 3, ma questo è impossibile perché $f(v)$ non può essere contemporaneamente uguale a $2v$ e uguale a $3v$, se $v \neq O$.

Calcoliamo allora l'intersezione fra il sottospazio $U = L[v_1, v_2]$ generato da v_1, v_2, e il sottospazio $W = L[v_3, v_4]$ generato da v_3, v_4. La dimensione dell'intersezione è uguale a

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

Sappiamo che $U + W$ è generato da v_1, v_2, v_3, v_4, quindi la sua dimensione è il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango, possiamo prima fare qualche operazione elementare di riga. Ad esempio $R_3 \to R_3 + R_2$ produce

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice si trova facilmente sviluppando per la terza riga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-6) + 8 - 0 - 0 - 2 = 0$$

Quindi il rango della matrice $\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ è inferiore a 4. D'altronde si vede facilmente che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(U) = 2$, e anche che v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 2$. Abbiamo dunque

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 2 + 2 - \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4)) > 4 - 4 = 0$$

cioè $U \cap W$ non può essere uguale a $\{O\}$. Quindi non può esistere f tale che $E(2) = U$ ed $E(3) = W$.

Esercizio 7. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

abbia $\lambda = 1$ come autovalore.

Soluzione esercizio 7. Per avere autovalore $\lambda = 1$, il polinomio caratteristico della matrice A deve annullarsi in $x = 1$. Calcoliamo allora il polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1 - x & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & -x & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha - x \end{vmatrix} = -x^3 - \alpha x^2 + x^2 + \alpha x - 2x + 12\alpha$$

Il valore in $x = 1$ è

$$p_A(1) = -1 - \alpha + 1 + \alpha - 2 + 12\alpha = 12\alpha - 2$$

Questo è uguale a 0 se e solo se $\alpha = \frac{1}{6}$.

Esercizio 8. Sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^2$. Trovare un vettore w di $\mathbb{R}^2$ che abbia la stessa norma di v e sia perpendicolare a v, esprimendo le sue entrate in termini di a e b.

Soluzione esercizio 8. La difficoltà naturalmente sta nel trovare un vettore che abbia la stessa norma di v. Se non ci fosse stata questa richiesta, avremmo potuto semplicemente definire $w = O$.

Scriviamo

$$w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il prodotto scalare con v:

$$\langle v, w \rangle = ac + bd$$

Dobbiamo trovare c e d in funzione di a e b, in modo che questo prodotto scalare sia sempre nullo. Un modo è porre $c = b$ e $d = -a$. Allora otteniamo

$$\langle v, w \rangle = ab + b(-a) = ab - ba = 0$$

Vediamo se, con questa scelta, il vettore w ha la stessa norma di v:

$$\|w\| = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{b^2 + (-a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|v\|$$

quindi in effetti il vettore

$$w = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

soddisfa tutte le richieste dell'esercizio.

Esercizio 9. Sia

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & v & \mapsto & \langle u,v\rangle u \end{array}$$

Si dimostri che f è lineare. Si calcoli la dimensione del nucleo di f, e si dimostri che un qualsiasi vettore del nucleo di f è ortogonale a tutti i vettori dell'immagine di f.

Soluzione esercizio 9. L'immagine di f è formata da tutti elementi proporzionali a u, perché $f(v)$ è sempre un prodotto fra u ed un numero. Quindi $\mathrm{Im}(f)$ è contenuta in $L[u]$. Quest'ultimo ha dimensione 1, perché u non è il vettore nullo per cui è linearmente indipendente, e forma perciò una base di $L[u]$.

Per cui $\mathrm{Im}(f)$ è contenuta in un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1. Allora $\mathrm{Im}(f)$ può avere dimensione 0 oppure 1.

Se $\mathrm{Im}(f)$ avesse dimensione 0 allora sarebbe formata dal solo vettore nullo, cioè avremmo $\langle u,v\rangle u = O$ per ogni v. Ma osserviamo che

$$f(u) = \langle u,u\rangle u = \|u\|^2 u$$

e questo vettore non è il vettore nullo perché $\|u\| \neq 0$ e $u \neq O$. Deduciamo che $\mathrm{Im}(f)$ non è formata dal solo vettore nullo.

Quindi non può avere dimensione zero, e l'unica altra possibilità è che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Usando il teorema della dimensione concludiamo che

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$$

Siano ora $w \in \mathrm{Ker}(f)$ e $z \in \mathrm{Im}(f)$, e dimostriamo che w è ortogonale a z. Le due condizioni che abbiamo su w e su z ci dicono che $f(w) = O$, e che z è un multiplo di u, mettiamo $z = au$ con $a \in \mathbb{R}$.

La condizione $f(w) = O$ vuol dire

$$\langle u,w\rangle u = O$$

Visto che $u \neq O$, concludiamo che $\langle u,w\rangle = 0$. Calcoliamo allora il prodotto scalare fra w e z:

$$\langle w,z\rangle = \langle w,au\rangle = a\langle w,u\rangle = a\cdot 0 = 0$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e siano $u,v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo le coordinate di u,v rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dimostrare che il prodotto scalare di u e v si può anche calcolare nel modo seguente

$$\langle u,v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

cioè come se le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ fossero proprio le entrate dei vettori (cioè come se $\mathcal{B}$ fosse la base canonica).

Soluzione esercizio 10. Scriviamo u e v in termini della base $\mathcal{B}$, sfruttando il fatto che l'esercizio ha già dato dei nomi alle loro coordinate:

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$
$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$$

Calcoliamo il prodotto scalare fra i due vettori, sostituendo solo u con l'espressione qui sopra:

$$\langle u,v\rangle = \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, v\rangle = a_1\langle v_1,v\rangle + a_2\langle v_2,v\rangle + \ldots + a_n\langle v_n,v\rangle = \ldots$$

Abbiamo visto a lezione (coordinate "di Fourier") che i prodotti scalari $\langle v_1,v\rangle$, …, $\langle v_n,v\rangle$ sono proprio le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, dato che $\mathcal{B}$ è ortonormale. In altre parole $\langle v_1,v\rangle = b_1$, …, $\langle v_n,v\rangle = b_n$. Allora l'uguaglianza di prima può continuare così

$$\ldots = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

che è la formula che volevamo dimostrare.