Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.7

14.11.2019

Esercizio 1. Dimostrare che una matrice A del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(dove $a, b, d \in \mathbb{R}$) è diagonalizzabile se e solo se $a \neq d$ oppure $b = 0$.

Esercizio 2. Data una matrice quadrata A e un polinomio

$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

definiamo $q(A)$ come la matrice seguente:

$$q(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$$

(le potenze di A sono calcolate col solito prodotto fra matrici). Sia A una matrice 2×2, e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Verificare che $p_A(A)$ è la matrice nulla.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo diagonalizzabile, con n autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tutti diversi fra loro. Sia W la somma di tutti gli autospazi $E(\lambda_i)$ tali che l'autovalore corrispondente λ_i sia $\neq 0$. Dimostrare che $W = \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Esercizio 5. Trovare, scrivendone la matrice canonica, un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano una base dell'autospazio $E(-3)$.

Esercizio 6. Dimostrare che non esiste alcun endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 2, e i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 3.

Esercizio 7. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

abbia $\lambda = 1$ come autovalore.

Esercizio 8. Sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^2$. Trovare un vettore w di $\mathbb{R}^2$ che abbia la stessa norma di v e sia perpendicolare a v, esprimendo le sue entrate in termini di a e b.

Esercizio 9. Sia
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
e si consideri l'applicazione
$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & v & \mapsto & \langle u, v\rangle u \end{array}$$
Si dimostri che f è lineare. Si calcoli la dimensione del nucleo di f, e si dimostri che un qualsiasi vettore del nucleo di f è ortogonale a tutti i vettori dell'immagine di f.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo le coordinate di u, v rispetto a $\mathcal{B}$:
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
Dimostrare che il prodotto scalare di u e v si può anche calcolare nel modo seguente
$$\langle u, v\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$
cioè come se le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ fossero proprio le entrate dei vettori (cioè come se $\mathcal{B}$ fosse la base canonica).