Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.6

Esercizio 1. Trovare un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

e scriverne la matrice (canonica).

Soluzione esercizio 1. Per dare un'applicazione lineare, basta definire le immagini dei vettori di una base. Due vettori hanno già l'immagine fissata, e sono linearmente indipendenti, per cui prendiamoli come primi vettori di una base. Ne servono altri 2, proviamo a mettere i primi 2 della base canonica: otteniamo 4 vettori che messi come colonne di una matrice forniscono

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\-2&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Il determinante è non nullo, infatti se lo sviluppiamo secondo l'ultima colonna otteniamo

$$\begin{vmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\-2&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\-2&0&0\\0&1&0\end{vmatrix} = 1\cdot(-2) = -2$$

Allora abbiamo una base. Sappiamo già quali devono essere le immagini dei primi due vettori, e siamo liberi di fissare le immagini degli altri due a piacere. Fissiamo per semplicità

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le immagini dei vettori della base canonica. Abbiamo già le immagini dei vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

rimangono da determinare le immagini di

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Scriviamo questi vettori come combinazione lineare della nostra base (di nuovo: si vede a occhio, oppure si risolve il sistema che fornisce i coefficienti):

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Segue:

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}f\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Dire, giusificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. I tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, perché

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 - 12 - 2 = 0$$

Troviamo una combinazione lineare uguale al vettore nullo: a occhio, o risolvendo il sistema che ha come incognite i coefficienti, troviamo

$$-4v_1 + 3v_2 - v_3 = O$$

Se esiste f con le proprietà richieste dall'esercizio, allora deve valere

$$-4f(v_1) + 3f(v_2) - f(v_3) = O$$

Ma

$$-4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \neq O$$

per cui la f cercata <u>non esiste</u>.

Esercizio 3. Trovare generatori del nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ e generatori dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-w \\ z+2w \end{pmatrix}$$

Calcolare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzione esercizio 3. Il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove A è la matrice di f. Calcoliamo A, trovando le immagini dei vettori della base canonica e mettendoli in colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice è A già a scalini, con due pivot. Quindi ha rango 2, perciò questa è la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$. Dal teorema della dimensione sappiamo che $\mathrm{Ker}(f)$ ha dimensione $4 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$.

Esercizio 4. Trovare, dandone la matrice canonica, un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e tale che l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 4. Iniziamo col determinare la matrice di f rispetto a due basi scelte da noi. Prendiamo una base che comprenda u_1 e u_2, ad esempio (u_1, u_2, u_3) dove u_3 è il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si tratta di una base perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Possiamo scegliere a piacere le immagini dei vettori della base prescelta, e avremo una f lineare. Dato che il nucleo dev'essere lo spazio generato da u_1 e u_2, poniamo

$$f(u_1) = f(u_2) = O.$$

L'immagine di f deve essere generata da w_1, quindi in particolare deve contenere w_1. Possiamo allora porre

$$f(u_3) = w_1.$$

Questo determina una f lineare. Troviamo il nucleo in termini di u_1, u_2, u_3: si tratta dell'insieme delle combinazioni lineari $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ tali che

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = O$$

Ora:

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + a_3f(u_3) = a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo è il vettore nullo se e solo se $a_3 = 0$, cioè il nucleo di f è proprio l'insieme delle combinazioni lineari $a_1u_1 + a_2u_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ a piacere. Segue che è generato da u_1 e u_2.

L'immagine di f è generata dalle immagini dei vettori di una base. Se prendiamo la base (u_1, u_2, u_3), le loro immagini sono rispettivamente O, O, w_1, quindi questi vettori generano $\mathrm{Im}(f)$. Chiaramente il vettore nullo è superfluo qui, per cui w_1 genera $\mathrm{Im}(f)$.

Rimane da trovare la matrice canonica di f. Dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica, e per questo li scriviamo in termini di u_1, u_2, u_3:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = u_1 - u_3, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = u_2 - u_1 - u_3, \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = u_3.$$

Le loro immagini allora sono

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = f(u_1) - f(u_3) = O - w_1 = -w_1,$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f(u_2) - f(u_1) - f(u_3) = O - O - w_1 = -w_1,$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f(u_3) = w_1$$

Mettendo questi tre vettori in una matrice otteniamo la matrice di f:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq}3$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 3. Siano $g_1(x) = 2x + 1$ e $g_2(x) = x^2 + x$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f\colon & V & \to & V \\ & p(x) & \mapsto & p'(x)g_1(x) + p''(x)g_2(x) \end{array}$$

Si verifichi che effettivamente f manda elementi di V in elementi di V, e che f è lineare. Si calcoli la matrice di f prendendo $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ come base sia del dominio sia del codominio.

Soluzione esercizio 5. Se $p(x)$ è un polinomio di grado al massimo 3, allora $p'(x)$ ha grado al massimo 2, e $p''(x)$ ha grado al massimo 1. Quindi $p'(x)g_1(x) + p''(x)g_2(x)$ ha grado al massimo 3, cioè effettivamente f manda elementi di V in elementi di V.

Calcoliamo la matrice di f rispetto alle basi date. Facciamo le immagini dei vettori della base data, e per evitare confusione la denotiamo anche con $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = g_1(x) = 2x + 1$$

$$f(v_3) = 2xg_1(x) + 2g_2(x) = 2x(2x + 1) + 2(x^2 + x) = 6x^3 + 4x$$

$$f(v_4) = 3x^2 g_1(x) + 6xg_2(x) = 12x^3 + 9x^2$$

quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2, e siano

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f\colon & V & \to & \mathbb{R}^3 \\ & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a \cdot w_1 + \mathrm{Tr}(A) \cdot w_2 \end{array}$$

Si dimostri che f è lineare, e si calcoli la sua matrice rispetto alle basi seguenti, rispettivamente di V e $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Soluzione esercizio 6. Verifichiamo che f è lineare. Siano $A, A' \in V$, scriviamole come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

quindi

$$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $f(A + A')$:

$$f(A + A') = (a + a')w_1 + \mathrm{Tr}(A + A')w_2 = (a + a')w_1 + (a + a' + d + d')w_2 =$$
$$aw_1 + a'w_1 + (a + d)w_2 + (a' + d')w_2 = f(A) + f(A')$$

Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$, e calcoliamo $f(\alpha A)$ sapendo che $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$:

$$f(\alpha A) = \alpha a w_1 + \mathrm{Tr}(\alpha A)w_2 = \alpha a w_1 + (\alpha a + \alpha d)w_2 = \alpha(aw_1 + (a + d)w_2) = \alpha \cdot f(A)$$

Quindi f è lineare.

Calcoliamo la matrice di f rispetto alle basi date. Calcoliamo le immagini dei vettori della base di V:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare le coordinate di questi vettori di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Le coordinate del secondo e del terzo vettore sono tutte nulle ovviamente, per cui calcoliamo solo quelle del primo e del quarto.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice di f in queste due basi quindi è

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema (nelle incognite x, y, z, w):

$$\begin{cases} x + 2y - z + w & = & 0 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica se U è contenuto in $\operatorname{Ker}(f)$, e se contiene $\operatorname{Im}(f)$.

Soluzione esercizio 7. Per capire se U è contenuto in $\operatorname{Ker}(f)$, troviamo una base di U. Risolviamo allora il sistema, ottenendo

$$U = \operatorname{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{5}s - \frac{3}{5}t \\ -\frac{1}{5}s - \frac{1}{5}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Per verificare se un vettore qualsiasi di U è in $\operatorname{Ker}(f)$, basta calcolare f del vettore scritto come qui sopra, e vedere se viene sempre il vettore nullo come risultato.

Un altro modo è trovare una base (u_1, u_2) di U, che qui avrà due vettori perché nelle soluzioni ci sono due "variabili libere". Se entrambi vengono mandati da f nel vettore nullo, allora tutto U sarà mandato nel vettore nullo, perché U è generato da u_1 e u_2. Vediamo questo metodo. Una base si ottiene nel solito modo; la scelta

$$\begin{cases} s & = & 1 \\ t & = & 0 \end{cases}$$

fornisce il vettore

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la scelta

$$\begin{cases} s & = & 0 \\ t & = & 1 \end{cases}$$

fornisce il vettore

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le immagini:

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = O$$

Quindi u_1 è nel nucleo di f.

$$f(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq O$$

quindi u_2 non è nel nucleo di f. Perciò U non è contenuto in $\mathrm{Ker}(f)$.

Vediamo se U contiene l'immagine di f. Per vederlo, scegliamo generatori di $\mathrm{Im}(f)$, e vediamo se soddisfano le equazioni che definiscono U. Se sì, allora $\mathrm{Im}(f)$ è contenuta in U.

Le colonne di A sono le immagini tramite f dei vettori della base canonica, quindi generano $\mathrm{Im}(f)$. La prima colonna soddisfa la prima equazione del sistema che definisce U, però non soddisfa la seconda equazione. Quindi U non contiene $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ x + y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice canonica di f, e la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Ricordiamo che per gli endomorfismi si prende per dominio e codominio sempre la stessa base.)

Soluzione esercizio 8. La matrice canonica è la matrice che ha per colonne le immagini dei vettori della base canonica. Quindi le colonne sono

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

La matrice canonica allora è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice M di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}'$. Dobbiamo scrivere i vettori di $\mathcal{B}'$ in termini di quelli di $\mathcal{E}$, ma sappiamo che questo vuol dire semplicemente prendere i vettori di $\mathcal{B}'$. Li mettiamo in colonna:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice di f nella base $\mathcal{B}'$ è la matrice

$$A' = M^{-1}AM$$

L'inversa di M è

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

per cui abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Consideriamo gli endomorfismi f_1, f_2 di $\mathbb{R}^2$ le cui matrici canoniche sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Per $i = 1$ e $i = 2$:

(1) calcolare gli autovalori di f_i,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f_i è diagonalizzabile,
(4) se f_i è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M_i e una matrice diagonale D_i tali che

$$A_i = M_i^{-1} \cdot D_i \cdot M_i$$

Soluzione esercizio 9. (1) Consideriamo f_1. Il polinomio caratteristico di A_1 è

$$p_{A_1}(x) = \det(A_1 - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & -4 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4$$

Il polinomio ha solo uno zero, e cioè $x = 2$, infatti

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Abbiamo quindi un solo autovalore, e cioè $\lambda = 2$. Troviamo l'autospazio $E(2)$. Oltre al vettore nullo, contiene gli autovettori v tali che $f_1(v) = 2v$. Ponendo

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

stiamo chiedendo che

$$A_1 \cdot v = 2v$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 4y = 2x \\ x = 2y \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dipendono da un parametro, ad esempio la y. Diamo un valore, ponendo $y = 1$, e troviamo $x = 2$. Allora una base dell'autospazio $E(2)$ è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non abbiamo altri autospazi, per cui la somma totale delle dimensioni di tutti gli autospazi è 1. La dimensione di $\mathbb{R}^2$ è 2, per cui f_1 <u>non è</u> diagonalizzabile.

(2) Consideriamo f_2. Il polinomio caratteristico di A_2 è

$$p_{A_2}(x) = \det(A_2 - xI) = \begin{vmatrix} -8-x & -5 \\ 10 & 7-x \end{vmatrix} = x^2 + x - 6$$

Le radici sono $x = 2$ e $x = -3$, quindi abbiamo due autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$.

Con lo stesso procedimento di prima, troviamo due basi per i due autospazi $E(2)$ ed $E(-3)$, ciascuna formata da un solo vettore. Per $E(2)$ troviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e per $E(-3)$ troviamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$, quindi f_2 è diagonalizzabile. In questa base, la matrice di f_2 è la matrice diagonale degli autovalori, cioè

$$A_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice di passaggio N_2 dalla base canonica alla base $\mathcal{B}'$: è quella che ha i vettori di $\mathcal{B}'$ come colonne, quindi

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria sappiamo che

$$A_2' = N_2^{-1} A_2 N_2$$

Deduciamo che

$$N_2 A_2' N_2^{-1} = A_2$$

quindi abbiamo anche trovato la matrice diagonale cercata $D_2 = A_2'$ e la matrice $M_2 = N_2^{-1}$ richiesta dall'ultima domanda dell'esercizio. Esplicitamente:

$$M_2 = N_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare gli autovalori di f,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f è diagonalizzabile,
(4) se f è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che

$$A = M^{-1} \cdot D \cdot M.$$

Soluzione esercizio 10. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x + 4$$

Per trovare le radici, vale la pena provare innanzitutto con i fattori (positivi e negativi) del termine noto. Troviamo due radici, $x = -1$ e $x = 4$. Allora $x+1$ e $x-4$ dividono $p_A(x)$, cioè esiste $q(x)$ tale che

$$p_A(x) = (x+1)(x-4)q(x)$$

È facile trovare $q(x)$ perché deve avere grado 1, cioè $q(x) = ax+b$. Sostituendo, si trovano $a = b = -1$, cioè

$$p_A(x) = -(x+1)^2(x-4)$$

Quindi abbiamo due autovalori: $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 4$, con molteplicità algebrica 1. La somma delle molteplicità algebriche è 3, per cui *è possibile* che f sia diagonalizzabile.

Per accertarlo, come nell'esercizio precedente, si trovano i due autospazi risolvendo due sistemi lineari. Troviamo una base delle soluzioni del primo sistema, cioè una base di $E(-1)$. Ad esempio possiamo trovare i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $E(4)$ possiamo trovare

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La somma delle dimensioni di tutti gli autospazi è $2+1=3$, per cui f è diagonalizzabile. Come nell'esercizio precedente, la matrice diagonale cercata D è quella degli autovalori:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Come per l'esercizio precedente, la matrice M è l'inversa di quella che ha per colonne i rispettivi autovettori trovati:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$