Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.6

7.11.2019

Esercizio 1. Trovare un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

e scriverne la matrice (canonica).

Esercizio 2. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Dire, giusificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Trovare generatori del nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ e generatori dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y-w\\z+2w\end{pmatrix}$$

Calcolare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 4. Trovare, dandone la matrice canonica, un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

e tale che l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq}3$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 3. Siano $g_1(x) = 2x+1$ e $g_2(x) = x^2+x$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f\colon & V & \to & V \\ & p(x) & \mapsto & p'(x)g_1(x) + p''(x)g_2(x) \end{array}$$

Si verifichi che effettivamente f manda elementi di V in elementi di V, e che f è lineare. Si calcoli la matrice di f prendendo $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ come base sia del dominio sia del codominio.

Esercizio 6. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2, e siano

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f\colon & V & \to & \mathbb{R}^3 \\ & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a \cdot w_1 + \mathrm{Tr}(A) \cdot w_2 \end{array}$$

Si dimostri che f è lineare, e si calcoli la sua matrice rispetto alle basi seguenti, rispettivamente di V e $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Esercizio 7. Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema (nelle incognite x, y, z, w):

$$\begin{cases} x + 2y - z + w &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \end{cases}$$

e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica se U è contenuto in $\mathrm{Ker}(f)$, e se contiene $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ x + y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice canonica di f, e la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Ricordiamo che per gli endomorfismi si prende per dominio e codominio sempre la stessa base.)

Esercizio 9. Consideriamo gli endomorfismi f_1, f_2 di $\mathbb{R}^2$ le cui matrici canoniche sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Per $i = 1$ e $i = 2$:

(1) calcolare gli autovalori di f_i,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f_i è diagonalizzabile,
(4) se f_i è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M_i e una matrice diagonale D_i tali che

$$A_i = M_i^{-1} \cdot D_i \cdot M_i$$

Esercizio 10. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare gli autovalori di f,

(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f è diagonalizzabile,
(4) se f è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che

$$A = M^{-1} \cdot D \cdot M.$$