Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.5

Ricordiamo che $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici $m \times n$ con entrate numeri reali, che $\mathbb{R}[x]$ denota l'insieme dei polinomi in una variabile x, e che $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ denota il sottoinsieme dei polinomi di grado $\leq d$.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base della somma $U + W$ e una base dell'intersezione $U \cap W$.

Soluzione esercizio 1. Calcolare una base di $U + W$ è semplice, per cui lo facciamo come prima cosa. Infatti, basta mettere insieme i vettori delle due basi per ottenere un insieme di generatori di $U + W$, in altre parole abbiamo

$$U + W = L[u_1, u_2, w_1, w_2].$$

Per avere una base, basta scartare (eventualmente) qualcuno dei 4 vettori, fino ad arrivare ad un insieme linearmente indipendente.

Vediamo ad esempio se si può scartare w_2, cioè se è combinazione lineare di u_1, u_2, w_1. Dobbiamo prendere l'equazione in cui w_1 si pone uguale ad una combinazione lineare di u_1, u_2, w_1, con coefficienti incognite x_1, x_2, x_3, e vedere se l'equazione ha soluzione. Cioè

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = w_1.$$

Questo si traduce in un sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite. Possiamo usare il teorema di Rouché-Capelli: calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa. Le due matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti ha determinante -2, quindi il rango è 3. La matrice completa ha rango anch'essa 3 (il minore 3×3 di sinistra è la matrice di prima, ed è invertibile), per cui il sistema è compatibile. Quindi esistono coefficienti che, messi al posto di x_1, x_2, x_3, rendono w_2 combinazione lineare di u_1, u_2, w_1. Non serve calcolarli: sapendo che esistono, sappiamo che w_2 è superfluo, quindi $L[u_1, u_2, w_1, w_2] = L[u_1, u_2, w_1]$.

Proseguiamo nella nostra ricerca di una base. A prima vista i vettori u_1, u_2, w_1 non sembrano linearmente dipendenti: per esserne sicuri, calcoliamo il rango della matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, w_1)$. Ma questo rango l'abbiamo già calcolato, perché è la matrice A di prima, e sappiamo che ha rango 3. Quindi i vettori u_1, u_2, w_1 sono linearmente indipendenti. Abbiamo dunque trovato una base di $U + W$, e cioè (u_1, u_2, w_1).

Osservazione supplementare. Notiamo che per decidere quale vettore scartare abbiamo ragionato sul rango delle matrici coinvolte: sapevamo che il rango della matrice A' non poteva essere 4, e abbiamo trovato il minore A che è 3×3 ed invertibile. Allora abbiamo potuto "scartare la colonna che avanza", la quarta, cioè abbiamo potuto scartare il quarto vettore. Quelli che rimangono sono linearmente indipendenti proprio perché formano una matrice A di rango 3 che è uguale al numero di vettori. Abbiamo detto a lezione che questo metodo funziona sempre, per trovare quale vettore scartare - o quali vettori scartare.

Abbiamo visto a lezione anche un metodo che usa l'algoritmo di Gauß: si riduce a scalini la matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, w_1, w_2)$, si trovano i pivot, e poi si selezionano fra i vettori u_1, u_2, w_1, w_2 quelli che corrispondono alle colonne dove (nella matrice a scalini) ci sono i pivot.

Vediamo ora l'intersezione $U \cap W$. Sappiamo che $U + W$ ha dimensione 3, per la prima parte dell'esercizio. Allora, anche se non è strettamente necessario, è utile applicare innanzitutto la formula di Graßmann, visto che si vede facilmente che U ha dimensione 2 (infatti u_1 e u_2 non sono proporzionali) e anche W (infatti w_1 e w_2 non sono proporzionali). Otteniamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Allora siamo sicuri che una base qualsiasi di $U \cap W$ contiene un solo vettore.

Per calcolarla, usiamo il metodo visto a lezione. Scriviamo cioè un vettore di U come combinazione lineare di u_1 e u_2, con coefficienti che sono incognite. Poi facciamo lo stesso con W, e uguagliamo:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_3 w_1 + x_4 w_2$$

Questa si traduce in un sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$S) \begin{cases} x_1 & = & x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 & = & -x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 & = & -x_3 \end{cases}$$

Risolvendo, troviamo l'insieme delle soluzioni seguente:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dobbiamo trovare solo un vettore (diverso dal vettore nullo) per avere una base di $U \cap V$, quindi assegnamo un valore non nullo a t. Ad esempio poniamo $t = 1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Attenzione: **questo non è** un vettore di $U \cap W$! È un vettore le cui entrate, **sostituite a** x_1, x_2, x_3, x_4, **forniscono un vettore di** $U \cap W$.

Cioè mettiamo $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, ottenendo il vettore

$$-3u_1 + 2u_2 = w_1 + 2w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che è in $U \cap W$. È non nullo, quindi da solo costituisce una base di $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Trovare un sistema lineare omogeneo S tale che U sia definito dalle equazioni di S, cioè tale che $U = \mathrm{Sol}(S)$.

Soluzione esercizio 2. Conviene prima vedere se uno dei tre vettori u_1, u_2, u_3 è superfluo, e in tal caso rimuoverlo. Questo si verifica se il rango della matrice che li ha per colonne non è uguale al loro numero, cioè 3. La matrice è

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Usiamo il teorema degli orlati: il minore 2×2 in alto a sinistra è invertibile, e i suoi due orlati sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

I due determinanti sono (sviluppando per la prima colonna):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4-6) + (-1) \cdot (-6+4) = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7+9) + 1 \cdot (-6+4) = 2-2 = 0$$

Quindi, per il teorema degli orlati, il rango di $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$ è 2. Segue che uno fra u_1, u_2, u_3 è superfluo. Proviamo se u_3 è superfluo: lo è se è combinazione lineare di u_1 e u_2.

Come nell'esercizio precedente, per vedere se u_3 è superfluo basta verificare che il rango della matrice che ha solo u_1 e u_2 sia uguale al rango di quella che ha anche u_3.

D'altronde, abbiamo visto a lezione che $L[u_1, u_2, u_3] = L[u_1, u_2]$ proprio quando u_3 è combinazione lineare di u_1 e u_2, e sapendo che la dimensione di $L[u_1, u_2, u_3]$ è 2, basta dimostrare che $L[u_1, u_2]$ ha dimensione 2. Questo è vero, perché la matrice è

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha il minore 2×2 in alto invertibile, per cui ha rango 2 proprio come $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$.

Allora abbiamo anche che u_1, u_2 sono linearmente indipendenti, e (u_1, u_2) è una base di $L[u_1, u_2, u_3]$.

Per trovare delle equazioni di U, mettiamo i vettori della base trovata in colonna, assieme ad una colonna di incognite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & -2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix}$$

La condizione che cerchiamo di descrivere è che questa matrice abbia rango 2. Troviamo un minore 2×2 invertibile nella parte senza incognite, ad esempio quello in alto a sinistra, e mettiamo a zero i determinanti dei suoi orlati, cioè

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & -2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Sviluppando i determinanti per la terza riga, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 \cdot (1) - x_2 \cdot (-2+2) + x_3 \cdot (1) = 0 \\ x_1 \cdot (-1) - x_2 \cdot (3-2) + x_4 \cdot (1) = 0 \end{cases}$$

ovvero un sistema che risponde al quesito dell'esercizio è

$$S) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcolare la dimensione dell'intersezione $U \cap W$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(Nota: non si richiede di determinare dei generatori o una base dell'intersezione, né di esprimerla mediante un sistema omogeneo.)

Soluzione esercizio 3. Dato che dobbiamo solo calcolare $\dim(U \cap W)$, è probabile che la formula di Graßmann sia sufficiente:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

Ora, calcoliamo le dimensioni di U e W calcolando il rango delle matrici formate dai generatori dati. Per U, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il minore ottenuto eliminando la prima riga ha determinante 16, quindi il rango è 3. Segue che $\dim(U) = 3$.

Per W, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Il rango è 2, quindi $\dim(W) = 2$. Rimane da calcolare la dimensione di $U + W$. Un insieme di generatori è ottenuto mettendo insieme generatori di U e generatori di W, per cui

$$U + W = L\left[u_1, u_2, u_3, w_1, w_2\right]$$

e la sua dimensione è il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolarne il rango. Possiamo intanto usare l'operazione di riga $R_4 \to R_4 + R_2$ e ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Scambiamo le prime due righe, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Con l'operazione di riga $R_3 \to R_3 - 2R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

e con $R_4 \to R_4 - 3R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

e infine scambiando le ultime due righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo raggiunto una matrice a scalini, con 4 pivot: quindi il rango è 4, cioè $\dim(U+W) = 4$. Mettendo insieme quanto ottenuto, deduciamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

e W dal sistema omogeneo

$$(S')\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Trovare un sistema omogeneo che definisca la somma $U+W$, e uno che definisca l'intersezione $U \cap W$.

Soluzione esercizio 4. L'intersezione $U \cap W$ è definita dal sistema che comprende tutte le equazioni, quelle di U e quelle di W:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Per la somma $U+W$, non abbiamo (ancora) alcuna scorciatoia. Dobbiamo allora trovare generatori di U e di W, metterli insieme ottenendo generatori di $U+W$, e poi dedurne delle equazioni per $U+W$.

Per trovare generatori di U e di W risolviamo i sistemi, le soluzioni sono:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3s+t}{2} \\ -\frac{5s+3t}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathrm{Sol}(S') = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3s+t}{2} \\ -2s \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(Ricordiamo che le soluzioni potrebbero essere scritte in modo diverso, non significa che siano sbagliate: dipende dal metodo usato per risolvere i sistemi. Anche usando solo l'algoritmo di Gauß, si possono fare scelte diverse per ridurre le matrici a scalini, e anche questo può produrre soluzioni scritte in modo diverso.)

Assegnando come al solito $s = 1$ e $t = 0$, e poi $s = 0$ e $t = 1$, otteniamo due vettori di U:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come al solito, si verifica facilmente che sono generatori delle soluzioni di S e sono linearmente indipendenti. Quindi (u_1, u_2) è una base di U.

Lo stesso procedimento per S' fornisce la base (w_1, w_2) formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segue che $U + W$ è generato da u_1, u_2, w_1, w_2, cioè

$$U + W = L[u_1, u_2, w_1, w_2].$$

Per trovare delle equazioni, prima troviamo una base. Notiamo che il rango della matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, w_1, w_2)$ è inferiore a 4, perché il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{5}{4} + 1\right) + \left(-\frac{9}{4} - 1 + \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

Allora $\dim(U + W) < 4$, e almeno un generatore dei 4 che abbiamo trovato è superfluo. Proviamo a scartare il primo, rimarremmo con u_2, w_1, w_2, e osserviamo che

$$\dim(L[u_2, w_1, w_2]) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si vede che il rango è 3 ad esempio togliendo la prima riga: il minore che rimane è invertibile.

Allora $L[u_2, w_1, w_2]$ è un sottospazio di $U + W$ e ha dimensione 3. Dato che la dimensione di $U + W$ è *al massimo* 3, deduciamo che $U + W$ ha dimensione 3 e che $U + W = L[u_2, w_1, w_2]$.

Quindi una base di $U+W$ è (u_2, w_1, w_2). Per trovare delle equazioni, mettiamo i vettori in colonna e aggiungiamo una colonna di incognite. Richiediamo che il rango della matrice ottenuta sia 3 (lo stesso senza incognite):

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & x_1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 3$$

Dato che il minore in basso a sinistra è invertibile, sappiamo che il rango è almeno 3. Per non avere più di 3, il determinante di tutta la matrice deve essere nullo. Questo produce il nostro sistema (di una equazione in 4 incognite) che descrive $U+W$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & x_1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 0$$

Esercizio 5. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È vero che $W \subseteq U$? È vero che $U = W$?

Soluzione esercizio 5. Per verificare che $W \subseteq U$, osserviamo che le entrate dei generatori di W dati dall'esercizio soddisfano le equazioni che definiscono U. Allora questi generatori sono in U, e segue che tutto W è contenuto in U. Quindi la risposta alla prima domanda è "sì".

Per vedere se $U = W$, controlliamo prima le dimensioni. La dimensione di W è al massimo due, perché è generato da 2 vettori (in realtà la dimensione è proprio 2, perché si vede subito che i due vettori sono linearmente indipendenti).

Invece U è lo spazio delle soluzioni di un sistema di 2 equazioni omogenee in 5 incognite. Il rango della matrice dei coefficienti è al massimo 2, per cui la dimensione di U è almeno $5 - 2 = 3$, per quanto visto a lezione. Quindi $\dim(W) \leq 2$ e $\dim(U) \geq 3$, da cui deduciamo che U e W non possono essere uguali.

Esercizio 6. (difficile) Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Soluzione esercizio 6. Se assumiamo che $U \subseteq W$, allora $U \cup W = W$, per cui è uno sottospazio vettoriale. Stesso ragionamento se $W \subseteq U$: in questo caso $U \cup W = U$, ed è un sottospazio vettoriale.

Viceversa, assumiamo che $U \cup W$ sia un sottospazio vettoriale. Dobbiamo dimostrare che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$. Se $U \subseteq W$, allora abbiamo già finito. Occupiamoci del caso in cui U non è contenuto in W: dovremo dimostrare che $W \subseteq U$.

Se supponiamo che U non è contenuto in W, allora stiamo supponendo che esiste un vettore $u \in U$ non appartenente a W, può essere utile osservarlo.

Per dimostrare che $W \subseteq U$, dobbiamo prendere un elemento qualsiasi $w \in W$, e dimostrare che $w \in U$. Sappiamo che $u \in U$ e che $w \in W$, quindi sono entrambi in $U \cup W$. Visto che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale, la somma $u + w$ è in $U \cup W$.

Questo vuol dire che $u + w$ appartiene a U oppure a W. Nel secondo caso, cioè se avessimo $u + w \in W$, allora potremmo risottrarre w sapendo di rimanere in W. Cioè

$$\underbrace{\underbrace{u + w}_{\in W} - w}_{\in W} = u.$$

Questo però contraddirebbe il fatto che u **non è** un elemento di W. Per cui la seconda possibilità non può verificarsi.

Rimane solo la prima, cioè deve essere $u + w \in U$. Allora

$$\underbrace{\underbrace{u+w}_{\in U} - u}_{\in U} = w,$$

cioè abbiamo ottenuto quello che volevamo: $w \in U$.

Esercizio 7. Calcolare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 7. Le coordinate di v sono le soluzioni dell'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v,$$

cioè

$$x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questo è un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 + x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile, e ha un'unica soluzione:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{3}{4} \\ x_2 & = & \frac{11}{4} \end{array}$$

Per cui

$$v = -\frac{3}{4} v_1 + \frac{11}{4} v_2.$$

Cioè le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Calcolare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 8. Le coordinate di v sono date dalla soluzione dell'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3, cioè esplicitamente

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

Questa equazione, che coinvolge vettori di $\mathbb{R}^3$, è equivalente al sistema seguente, in tre equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 & = & 1-t \\ 3x_2 + 4x_3 & = & 3t \end{cases}$$

Risolviamolo. Possiamo scriverlo in forma matriciale, come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

Conviene, perché l'esercizio ci dice che i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono una base, per cui la matrice dei coefficienti del sistema è invertibile. Calcoliamo l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora calcolare le soluzioni moltiplicando a sinistra per quest'inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3t \\ 2-t \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Questa è allora la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 5-3t \\ 2-t \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori v_1, v_2, v_3 dell'esercizio precedente. Sia v il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino le coordinate di v rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione esercizio 9. Le coordinate di un vettore qualsiasi rispetto alla base canonica sono le sue entrate. Calcoliamo quindi il vettore v esplicitamente. Basta prendere la combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 con i coefficienti dati da $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$:

$$v = 6v_1 - v_2 + 2v_3 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Queste sono allora anche le coordinate di v rispetto alla base canonica. Se denotiamo come $\mathcal{E}$ la base canonica, possiamo scrivere

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sia $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ la base formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sia $v \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$.

Soluzione esercizio 10. Possiamo procedere in due modi.

(1) Il metodo più diretto è semplicemente risolvere il sistema

$$x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = v_1 - 2v_2 - v_3$$

Vediamo come mai questo è il sistema giusto. Abbiamo messo davanti a v_1, v_2, v_3 i coefficienti dati dalle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi il secondo membro di quest'equazione è uguale a v.

Ora, dobbiamo trovare le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$, cioè stiamo trovando numeri x_1, x_2, x_3 tali che messi come coefficienti a w_1, w_2, w_3 producono lo stesso vettore. Si tratta allora proprio dell'equazione che abbiamo scritto.

Scrivendolo esplicitamente, è facile usare i metodi soliti e trovare la soluzione (unica)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per cui

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) Come metodo alternativo, possiamo usare le osservazioni fatte a lezione sulle coordinate di un vettore rispetto a una base, calcolate usando la matrice M. Si vedano gli appunti sul sito del corso, sezione 6.

Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Possiamo "passare da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$" nel modo seguente: prima "passiamo da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$", e poi "passiamo da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}'$".

Consideriamo cioè la matrice

$$M = \mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3)$$

cioè

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che allora, dato un qualsiasi vettore $v \in \mathbb{R}^3$, abbiamo

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = M^{-1} \cdot v$$

il che equivale a dire

$$v = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

Ugualmente, se poniamo

$$N = \mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3)$$

cioè

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = N^{-1} \cdot v$$

Ora possiamo esprimere $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$ direttamente in termini di $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$, senza passare per v. Infatti

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = N^{-1} \cdot v = N^{-1} \cdot M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

Calcoliamo allora N^{-1}:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e il prodotto $N^{-1} \cdot M$, ottenendo

$$N^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Concludiamo allora:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = (N^{-1} \cdot M) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11. Verificare che i seguenti polinomi

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) & = & x^2, \\ p_2(x) & = & x+1, \\ p_3(x) & = & x^4+x^3+x^2+x, \\ p_4(x) & = & -3x^2+x, \\ p_5(x) & = & x^4-x^3 \end{array}$$

sono linearmente indipendenti, considerati come vettori dello spazio vettoriale V dei polinomi in una variabile x e a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ è una base del sottospazio $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado al massimo 4.

Soluzione esercizio 11. Sappiamo che la dimensione di U è 5, perché abbiamo osservato a lezione che $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ è una base di U. Quindi il numero dei polinomi proposti dal testo dell'esercizio è giusto. Sono tutti in U, perché hanno tutti grado non superiore a 4. Quindi basta dimostrare che sono linearmente indipendenti (rispondendo alla prima domanda) per ottenere automaticamente che sono una base di U (rispondendo alla seconda domanda).

Dimostriamo dunque che sono linearmente indipendenti, con il solito metodo. Consideriamo una combinazione lineare di questi polinomi, con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, e supponiamo sia il vettore nullo. Scriviamo quest'ultimo come al solito come O, ricordandoci che in questo caso si tratta semplicemente della funzione (di x) costante, uguale a 0 per ogni x:

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) + \lambda_5 p_5(x) = O$$

Dobbiamo dedurre in qualche modo che tutti i λ sono 0. Sostituendo in questa formula le formule esplicite dei polinomi, otteniamo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x^4+x^3+x^2+x) + \lambda_4(-3x^2+x) + \lambda_5(x^4-x^3) = O$$

e raccogliendo le potenze uguali di x otteniamo

$$(\lambda_3+\lambda_5)x^4 + (\lambda_3-\lambda_5)x^3 + (\lambda_1+\lambda_3-3\lambda_4)x^2 + (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)x + \lambda_2 = O$$

L'unico modo per cui il polinomio a sinistra sia costantemente nullo è che tutti i coefficienti siano nulli, cioè

$$\begin{cases} \lambda_3+\lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3-\lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_3-3\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

In altre parole, i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sono soluzioni del sistema di equazioni lineari omogeneo che ha per matrice dei coefficienti la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante per la prima colonna, ottenendo

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

e sviluppando secondo l'ultima riga otteniamo

$$\dots = +1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0+0+1-0-0-(-1)) = -(1+1) = -2$$

È diverso da 0, per cui la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo è invertibile. Quindi il sistema ha **solo** la soluzione nulla, e cioè $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Abbiamo dimostrato che i polinomi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 12. Calcolare le coordinate del polinomio

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ dell'esercizio precedente.

Soluzione esercizio 12. Dobbiamo trovare coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ tali che

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) + \lambda_5 p_5(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Raccogliamo i coefficienti come nell'esercizio precedente, e uguagliamo i coefficienti delle potenze di x: otteniamo il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4 & = & 3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & -2 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni deduciamo $\lambda_3 = \lambda_5 = 0$, e dall'ultima $\lambda_2 = 1$. Sostituiamo nelle rimanenti:

$$\begin{cases} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_4 & = & 3 \\ 1 + \lambda_4 & = & -2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} \lambda_4 & = & -3 \\ \lambda_1 - 3 \cdot (-3) & = & 3 \end{cases}$$

e dall'ultima ricaviamo $\lambda_1 = 3 - 9 = -6$. Per cui le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(p(x)) = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13. Sia U il sottoinsieme delle matrici 2×2 in cui la somma degli elementi sulla diagonale principale è zero. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcolarne una base.

Soluzione esercizio 13. Verifichiamo gli assiomi di sottospazio vettoriale.

(1) La matrice nulla

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è in U, infatti la somma dei due elementi sulla diagonale principale è $0 + 0 = 0$.

(2) Date due matrici in U, verifichiamo che la loro somma è in U. Scriviamole come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

La loro somma è la matrice

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

Dato che le due matrici di partenza sono in U, sappiamo che $a+d=0$ e che $a'+d'=0$. Allora, nella terza matrice, sommando gli elementi della diagonale principale otteniamo $a+a'+d+d'=0$, cioè la terza matrice (la somma delle due) è in U.

(3) Prendiamo una matrice A in U e un numero reale λ, e verifichiamo che λA è in U. Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

e allora

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Visto che $A \in U$, sappiamo che $a+d=0$, e ne deduciamo che $\lambda a + \lambda d = 0$, cioè $\lambda A \in U$.

Troviamo una base di U. Dato che la somma dei due elementi sulla diagonale principale fa 0, allora uno è l'opposto dell'altro. Cioè un elemento qualsiasi A di U si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sembra che nessuno fra a, b, c sia superfluo, per cui ci aspettiamo che $\dim(U)$ sia 3. Per verificarlo, e trovare anche una base, usiamo la stessa tecnica che usiamo per calcolare una base delle soluzioni di un sistema omogeneo. Cioè diamo valori "semplici" ad a, b, c in tre modi diversi, e vediamo se otteniamo una base.

È una buona idea, come al solito, dare 1 ad uno e 0 agli altri. Mettendo $a = 1$ otteniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre mettendo a 1 gli altri due, a turno, otteniamo le due matrici

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che (A_1, A_2, A_3) è una base di U.

Intanto, le tre matrici devono essere dei generatori, ma questo si verifica facilmente osservando che un elemento qualsiasi A di U, scritto come sopra, è uguale a

$$A = aA_1 + bA_2 + cA_3,$$

infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non solo: questo è l'*unico modo* di scrivere A come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3, perché evidentemente se prendiamo altri coefficienti invece di a, b, c il risultato non è più la matrice A.

Per cui, grazie a un teorema visto a lezione, la terna (A_1, A_2, A_3) è una base di U.

Esercizio 14. Sia U l'insieme delle matrici simmetriche 3×3. Dimostrare che U è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 3×3, e trovarne una base.

Soluzione esercizio 14. Dimostriamo che U è un sottospazio. Si vede facilmente che:

(1) la matrice nulla è simmetrica, per cui appartiene a U,
(2) la somma di matrici simmetriche è simmetrica,
(3) riscalare una matrice simmetrica per un numero reale la mantiene simmetrica.

Segue che U è un sottospazio vettoriale.

Per trovare una base, sfruttiamo il fatto che una matrice 3×3 è simmetrica esattamente quando alcune entrate si ripetono. Più precisamente, è simmetrica proprio quando la possiamo scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Allora la possiamo scrivere come combinazione lineare delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti

$$A = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 + d \cdot A_4 + e \cdot A_5 + f \cdot A_6$$

Questo è anche l'unico modo di scrivere A usando queste sei matrici: è evidente che se usassimo numeri diversi da a, b, c, d, e, f otterremmo una matrice diversa da A. Quindi $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ è una base di U.

Esercizio 15. Sia A una matrice $n \times n$.

(1) Dimostrare che $A + A^t$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^t$ è una matrice antisimmetrica.
(2) Dimostrare che A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.
(3) Rispondere alle domande seguenti, giustificando la risposta (se sì, dimostrarlo, altrimenti trovare un controesempio):
   (a) è vero che $A \cdot A^t$ è sempre simmetrica?
   (b) è vero che è sempre uguale a $A^t \cdot A$?

Soluzione esercizio 15. (1) Facciamo la trasposta di $B = A + A^t$. Chiamando come al solito $a_{i,j}$ l'entrata di A alla riga i e colonna j, osserviamo che l'entrata $b_{i,j}$ corrispondente di B è uguale a $a_{i,j} + a_{j,i}$. Allora alla riga j e colonna i la matrice B ha l'entrata $b_{j,i} = a_{j,i} + a_{i,j}$, che però è uguale a $b_{i,j}$. Quindi B è simmetrica.

Si può anche osservare che la trasposta di una somma è uguale alla somma delle trasposte (è un'uguaglianza che si verifica facilmente). Allora si può scrivere

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = B$$

per cui B è simmetrica. Sia ora $C = A - A^t$. Allora (in modo simile alla prima parte) abbiamo $c_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i}$, che è uguale a $c_{j,i}$ ma cambiato di segno. Segue $C^t = -C$, cioè C è antisimmetrica.

(2) Visto che $A + A^t$ è simmetrica, lo è anche la matrice $\frac{1}{2}(A + A^t)$. Allo stesso modo, la matrice $\frac{1}{2}(A - A^t)$ è antisimmetrica. Allora basta osservare che

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{antisimmetrica}}$$

(3) (a) Ricordiamo che il prodotto delle trasposte è la trasposta del prodotto, ma con l'ordine invertito. Cioè, date due matrici A e D (entrambe $n \times n$), abbiamo

$$(A \cdot D)^t = D^t \cdot A^t.$$

Ne deduciamo che

$$(A \cdot A^t)^t = \underbrace{(A^t)^t}_{=A} \cdot A^t = A \cdot A^t$$

per cui la risposta alla domanda è "sì".

(b) Non è vero che $A \cdot A^t = A^t \cdot A$ per qualsiasi matrice A. Ad esempio, prendendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ma

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi in questo caso

$$A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$$

e la risposta alla domanda dell'esercizio è "no".

Esercizio 16. Denotiamo con $\mathrm{GL}(n)$ l'insieme delle matrici <u>invertibili</u> $n \times n$. Dire, giustificando la risposta, se $\mathrm{GL}(3)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Soluzione esercizio 16. Sappiamo che la matrice nulla non è invertibile, infatti il suo determinante è zero. Quindi non appartiene a $\mathrm{GL}(3)$, che perciò non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 17. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Calcolare le coordinate dei vettori della base, rispetto alla base stessa, cioè calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i)$ per qualsiasi i da 1 a n.

Soluzione esercizio 17. Dobbiamo esprimere ogni vettore v_i come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. Questo è facile, basta assegnare 1 come coefficiente a v_i stesso, e 0 agli altri:

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

In altre parole

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove l'1 compare alla riga i-esima.

Esercizio 18. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno stesso spazio vettoriale. Supponiamo che le coordinate di tutti i vettori siano sempre le stesse, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, cioè supponiamo che valga

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

per ogni $v \in V$. Dimostrare che allora le due basi sono uguali. (Suggerimento: si può usare la risposta all'esercizio precedente.)

Soluzione esercizio 18. Denotiamo i vettori di $\mathcal{B}$ come $v_1, \ldots, v_n$ e quelli di $\mathcal{B}'$ come $v'_1, \ldots, v'_n$. Consideriamo v_1: sappiamo (vedi l'esercizio precedente) che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cioè i coefficienti da mettere davanti a $v'_1, \ldots, v'_n$ per ottenere v_1 sono $1, 0, \ldots, 0$:

$$v_1 = 1 \cdot v'_1 + 0 \cdot v'_2 + \ldots + 0 \cdot v'_n$$

Allora $v_1 = v'_1$. Allo stesso modo, dato un vettore qualsiasi v_i della prima base, sappiamo che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove l'1 compare alla riga i-esima. Allora ne deduciamo che

$$v_i = 0 \cdot v'_1 + \ldots + 0 \cdot v'_{i-1} + 1 \cdot v'_i + 0 \cdot v'_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v'_n$$

per cui $v_i = v'_i$. Segue che $v_1 = v'_1, v_2 = v'_2, \ldots, v_n = v'_n$, cioè $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Esercizio 19. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, e sia $w = sv_1 + tv_2$ dove s e t sono numeri reali. Trovare i valori di $s, t \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{B}' = (v_1, w)$ è una base di V.

Soluzione esercizio 19. Visto che la dimensione è 2, basta avere due vettori linearmente indipendenti per avere una base. Ora, se $t = 0$ allora i due vettori sono v_1 e $w = sv_1$, che sono proporzionali, per cui linearmente dipendenti. Per cui sicuramente è necessario avere $t \neq 0$ per avere una base.

Dimostriamo che se $t \neq 0$ allora i vettori v_1 e w sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una combinazione lineare uguale al vettore nullo:

$$av_1 + bw = O$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Sostituiamo $w = sv_1 + tv_2$ e otteniamo

$$O = av_1 + b(sv_1 + tv_2) = (a + bs)v_1 + btv_2$$

Dato che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, i coefficienti dell'ultima combinazione lineare devono essere nulli, cioè

$$a + bs = bt = 0$$

Sappiamo che $t \neq 0$, quindi $b = 0$. Allora $a + bs = a$, che dev'essere anch'esso 0. Cioè $a = b = 0$, che è quello che volevamo dimostrare.

Quindi $\mathcal{B}'$ è una base se e solo se $t \neq 0$.

Esercizio 20. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(2) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ c \cdot d \end{pmatrix}$$

(3) $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che, data una matrice A, il valore di $f(A)$ è uguale alla somma di tutte le entrate di A.

(4) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi in x) data da $f(p(x)) = p(2)$, cioè f associa ad un polinomio qualsiasi $p(x)$ il valore del polinomio in $x = 2$.

Soluzione esercizio 20. (1) Si vede facilmente che

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{8}{5} \neq 2 \cdot f(1)$$

Quindi non è vero che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (inteso come scalare) e per ogni $v \in \mathbb{R}$ (inteso come vettore) si ha $f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v)$, e quindi f non è lineare.

(2) Prendiamo la somma di due vettori qualsiasi e facciamo f:

$$f\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \\ d + d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + a') \cdot (b + b') \\ (c + c') \cdot (d + d') \end{pmatrix}$$

Questo <u>non è</u> sempre uguale alla somma

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + a'b' \\ cd + c'd' \end{pmatrix}$$

infatti ad esempio prendendo $a = a' = c = c' = 1$ e $b = b' = d = d' = 2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} (1+1)\cdot(2+2) \\ (1+1)\cdot(2+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

quindi anche questa f non è lineare.

(3) Questa f è lineare. Infatti

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$$

e abbiamo

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} =$$

$$= a + a' + b + b' + c + c' + d + d' = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$f\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f \cdot \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d = \alpha(a + b + c + d) = \alpha \cdot f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(4) Anche questa f è lineare. Infatti il valore in $x = 2$ di una somma di due polinomi $p(x)+q(x)$ è proprio uguale a $p(2) + q(2)$, e il valore in $x = 2$ di un polinomio riscalato per uno scalare $\alpha \cdot p(x)$ è uguale a $\alpha \cdot p(2)$.

Esercizio 21. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data dalla formula

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -2b \\ 3a-b \\ a \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice (canonica) di f.

Soluzione esercizio 21. Basta trovare le immagini dei vettori della base canonica. Mettiamo dunque $a = 1$ e $b = 0$, e poi $a = 0$ e $b = 1$. Troviamo le due immagini

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di f è quella formata da queste due colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 22. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(I tre vettori di cui calcoliamo la f formano una base di $\mathbb{R}^3$.) Scrivere la matrice (canonica) di f.

Soluzione esercizio 22. Dobbiamo trovare le immagini dei vettori della base canonica. Prima scriviamoli in termini dei tre vettori dati: i coefficienti si trovano come al solito risolvendo i sistemi lineari (3 equazioni in 3 incognite):

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Ora possiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica, grazie al fatto che f è lineare:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -5f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 3f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 3f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix}7 & -\frac{7}{2} & -3\\0 & 0 & 0\\3 & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$$