Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.5

24.10.2019

Ricordiamo che $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici $m\times n$ con entrate numeri reali, che $\mathbb{R}[x]$ denota l'insieme dei polinomi in una variabile x, e che $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ denota il sottoinsieme dei polinomi di grado $\leq d$.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Calcolare una base della somma $U+W$ e una base dell'intersezione $U\cap W$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}-4\\-3\\4\\-7\end{pmatrix}$$

Trovare un sistema lineare omogeneo S tale che U sia definito dalle equazioni di S, cioè tale che $U = \mathrm{Sol}(S)$.

Esercizio 3. Calcolare la dimensione dell'intersezione $U\cap W$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\\3\end{pmatrix}$$

e W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}0\\-3\\4\\6\end{pmatrix}.$$

(Nota: non si richiede di determinare dei generatori o una base dell'intersezione, né di esprimerla mediante un sistema omogeneo.)

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} -x_1+x_2+4x_3+2x_4 &= 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0\end{cases}$$

e W dal sistema omogeneo

$$(S')\begin{cases} -2x_1+3x_3+x_4 &= 0\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4 &= 0\\ 2x_1+3x_2+3x_3-x_4 &= 0\end{cases}$$

Trovare un sistema omogeneo che definisca la somma $U+W$, e uno che definisca l'intersezione $U\cap W$.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

e W il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È vero che $W \subseteq U$? È vero che $U = W$?

Esercizio 6. (difficile) Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Esercizio 7. Calcolare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Calcolare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori v_1, v_2, v_3 dell'esercizio precedente. Sia v il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino le coordinate di v rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sia $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ la base formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sia $v \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$.

Esercizio 11. Verificare che i seguenti polinomi

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2, \\ p_2(x) &= x+1, \\ p_3(x) &= x^4+x^3+x^2+x, \\ p_4(x) &= -3x^2+x, \\ p_5(x) &= x^4-x^3 \end{aligned}$$

sono linearmente indipendenti, considerati come vettori dello spazio vettoriale V dei polinomi in una variabile x e a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ è una base del sottospazio $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado al massimo 4.

Esercizio 12. Calcolare le coordinate del polinomio

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ dell'esercizio precedente.

Esercizio 13. Sia U il sottoinsieme delle matrici 2×2 in cui la somma degli elementi sulla diagonale principale è zero. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcolarne una base.

Esercizio 14. Sia U l'insieme delle matrici simmetriche 3×3. Dimostrare che U è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 3×3, e trovarne una base.

Esercizio 15. Sia A una matrice $n \times n$.

(1) Dimostrare che $A + A^t$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^t$ è una matrice antisimmetrica.
(2) Dimostrare che A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.
(3) Rispondere alle domande seguenti, giustificando la risposta (se sì, dimostrarlo, altrimenti trovare un controesempio):
   (a) è vero che $A \cdot A^t$ è sempre simmetrica?
   (b) è vero che è sempre uguale a $A^t \cdot A$?

Esercizio 16. Denotiamo con $\mathrm{GL}(n)$ l'insieme delle matrici <u>invertibili</u> $n \times n$. Dire, giustificando la risposta, se $\mathrm{GL}(3)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 17. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Calcolare le coordinate dei vettori della base, rispetto alla base stessa, cioè calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i)$ per qualsiasi i da 1 a n.

Esercizio 18. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno stesso spazio vettoriale. Supponiamo che le coordinate di tutti i vettori siano sempre le stesse, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, cioè supponiamo che valga

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

per ogni $v \in V$. Dimostrare che allora le due basi sono uguali. (Suggerimento: si può usare la risposta all'esercizio precedente.)

Esercizio 19. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, e sia $w = sv_1 + tv_2$ dove s e t sono numeri reali. Trovare i valori di $s, t \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{B}' = (v_1, w)$ è una base di V.

Esercizio 20. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.
(2) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ c \cdot d \end{pmatrix}$$

(3) $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che, data una matrice A, il valore di $f(A)$ è uguale alla somma di tutte le entrate di A.
(4) $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ data da $f(p(x)) = p(2)$, cioè f associa ad un polinomio qualsiasi $p(x)$ il valore del polinomio in $x = 2$.

Esercizio 21. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data dalla formula

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -2b \\ 3a-b \\ a \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice (canonica) di f.

Esercizio 22. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I tre vettori di cui calcoliamo la f formano una base di $\mathbb{R}^3$.) Scrivere la matrice (canonica) di f.