**Corso di Geometria**

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.4

17.10.2019

**Esercizio 1.** Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi $U$ è un sottospazio vettoriale del rispettivo spazio vettoriale $V$.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tali che $b \geq 0$. (Cioè $U$ è il "semipiano superiore" del piano $\mathbb{R}^2$.)

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

tali che $a+b+c$ è un numero intero (ad es. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, la somma è 3, che è un numero intero).

(3) $V =$ lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ a coefficienti numeri reali, in una incognita $x$; $U =$ il sottoinsieme dei polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = 1$ (es. $p(x) = 2x^2 - x - 1$ è in $U$, perché $p(1) = 0$, invece il polinomio $q(x) = 3x^2$ non è in $U$, perché $q(1) = 3 \neq 0$).

**Esercizio 2.** Sia $U$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Cioè $U = L[u_1, u_2, u_3]$.) Determinare $\dim(U)$.

**Esercizio 3.** Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro $t$, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

è nel sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2]$ generato da $v_1$ e $v_2$.

**Esercizio 4.** Dimostrare che i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

generano lo stesso sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1$ e $v_2$ dell'esercizio precedente.

**Esercizio 5.** Trovare una base del sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.** Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che sono linearmente indipendenti, e trovare altri due vettori $v_3$, $v_4$ di $\mathbb{R}^4$ in modo che $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 7.** Trovare una base del sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo (nelle incognite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$)

$$S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.** Dimostrare che i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generano il sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del sistema lineare dell'esercizio precedente. Estrarre da $w_1, w_2, w_3$ una base di $U$.

**Esercizio 9.** Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Si noti che dipendono tutti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2, v_3]$ generato da $v_1$, $v_2$ e $v_3$, al variare del parametro $t$.

**Esercizio 10.** Supponiamo di avere vettori $v_1, v_2, v_3, v_4$ in uno spazio vettoriale $V$. Supponiamo che $(v_1, v_2)$ sia una base di $L[v_1, v_2]$, e che $(v_3, v_4)$ sia una base di $L[v_3, v_4]$. Supponiamo inoltre che

$$L[v_1, v_2] \cap L[v_3, v_4] = \{O\}.$$

Dimostrare che allora i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti.