Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.3

Esercizio 1. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ ha soluzioni *non nulle* il seguente sistema in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$BX = \lambda X$$

(Nota: non si richiede di trovare le soluzioni.)

Soluzione esercizio 1. Il sistema può essere riscritto nella forma

$$(B - \lambda I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità 3×3. Il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se il rango di $B - \lambda I$ è minore del numero di incognite, cioè 3. In altre parole, se e solo se

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Calcoliamo allora il determinante di $B - \lambda I$, che è

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (2-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2$$

Quindi il sistema originario ha soluzioni non nulle per quei valori di λ per cui

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0$$

Per trovare le radici del polinomio, proviamo intanto con i fattori del termine noto: $\pm 1, \pm 2$. Troviamo che $\lambda_1 = 2$ è una radice. Allora possiamo dividere per $\lambda - 2$, ottenendo

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

Le altre due radici sono quindi le radici di $-\lambda^2 - 4\lambda + 1$, che sono

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{16+4}}{-2} = -2 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Quindi il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $\lambda = 2$, oppure $\lambda = -2+\sqrt{5}$, oppure $\lambda = -2-\sqrt{5}$.

Esercizio 2. Determinare se le tre k-uple di vettori seguenti sono linearmente dipendenti, e, se sì, trovare dei coefficienti non tutti nulli in modo che la combinazione lineare dei vettori con questi coefficienti sia uguale al vettore nullo.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 2. Consideriamo prima v_1 e v_2. Costruiamo la matrice $\mathrm{Mat}(v_1, v_2)$ che li ha per colonne:

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2, infatti il minore 2×2 costituito dalle prime due righe ha determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Quindi il rango non è inferiore al numero di vettori: segue che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esaminiamo w_1, w_2, w_3. Si tratta di 3 vettori colonna di $\mathbb{R}^2$, per cui sono linearmente dipendenti. I coefficienti chiesti dall'esercizio sono dei numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esplicitando w_1, w_2, w_3, si trova che $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ sarà una soluzione non tutta nulla del sistema di equazioni lineari seguente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0, \\ -2x_1 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Scritto in forma matriciale è

$$\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3) \cdot X = O$$

dove $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e poniamo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, e $\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Non serve trovare tutte le soluzioni: è richiesta solo una soluzione non tutta nulla. Si trova facilmente senza fare molti conti: ad esempio $x_1 = 1$, $x_3 = 2$ (dedotto dalla seconda equazione), $x_2 = -8$ (dedotto dalla prima equazione). Questi sono allora i coefficienti di una relazione di dipendenza lineare, infatti si verifica facilmente che

$$w_1 - 8w_2 + 2w_3 = 1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine, consideriamo i vettori z_1, z_2, z_3. Si tratta di 3 vettori di $\mathbb{R}^3$, per cui sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice $\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3)$ che li ha per colonne è non invertibile. Abbiamo

$$\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det(\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3)) = -2$$

per cui la matrice è invertibile. Deduciamo che i tre vettori z_1, z_2, z_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 - \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

e i vettori

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

Soluzione esercizio 3. I tre vettori, essendo elementi di $\mathbb{R}^3$, sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathrm{Mat}(v, w, z)$ è invertibile. Calcoliamone allora il determinante:

$$|\,\mathrm{Mat}(v, w, z)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 2(2 - \lambda) + 6\lambda = 7\lambda - 4$$

Il determinante è non nullo per ogni $\lambda \neq \frac{4}{7}$. Per questi valori di λ allora v, w, z sono linearmente indipendenti. Per $\lambda = \frac{4}{7}$ invece il determinante è nullo, per cui v, w, z sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta.

(1) È possibile che l'insieme vuoto sia uno spazio vettoriale?
(2) È possibile che un insieme con solo un elemento sia uno spazio vettoriale?
(3) È possible che un insieme con solo due elementi sia uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)?

Soluzione esercizio 4. (1) No. Infatti, per il terzo assioma, l'insieme V deve contenere almeno un elemento, e cioè il vettore nullo O. Osserviamo che invece $V = \varnothing$ (l'insieme vuoto) soddisfa il quarto assioma! Infatti il quarto assioma richiede l'esistenza di $-v$ *per ogni elemento* $v \in V$. Dato che l'insieme vuoto non ha elementi, questo di fatto equivale a non richiedere *alcuna* condizione su V, cioè il quarto assioma, nel caso dell'insieme vuoto, è *automaticamente soddisfatto*.

(2) Sì. In questo caso l'unico elemento di V deve essere il vettore nullo:

$$V = \{O\}$$

Questo insieme è uno spazio vettoriale: possiamo definire la somma di vettori come $O+O = O$ e il prodotto per uno scalare come $\alpha \cdot O = O$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Date queste due definizioni, gli assiomi 1)-8) della definizione di spazio vettoriale sono facilmente verificate.

(3) No. Infatti, almeno uno dei due vettori deve essere il vettore nullo, mentre l'altro non lo è (abbiamo assunto che V abbia esattamente due elementi):

$$V = \{O, v\}$$

con $v \neq O$. Allora esiste l'opposto $-v$ di v. Abbiamo due possibilità per $-v$: o è uguale a O, oppure a v.

Ma se $-v = O$, allora possiamo sommare v a entrambi i membri ottenendo $O = v$, che contraddice il fatto che V ha due elementi distinti. Se invece $v = -v$, sommando v a entrambi i membri otteniamo

$$2v = O$$

Possiamo moltiplicare per $\frac{1}{2}$, ottenendo

$$v = \frac{1}{2} \cdot O = O$$

Anche questo contraddice il fatto che V abbia due elementi distinti.

Esercizio 5. Siano v, w elementi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare, usando solo gli assiomi di spazio vettoriale (senza dare per scontate le altre proprietà viste a lezione!), che se gli opposti $-v$ e $-w$ sono uguali, allora v e w sono uguali.

Soluzione esercizio 5. L'esercizio suppone che

$$-v = -w$$

Uno degli assiomi di spazio vettoriale asserisce che

$$v + (-v) = O$$

Aggiungiamo a entrambi i membri il vettore w, ottenendo

$$w + (v + (-v)) = w + O = w$$

dove la seconda uguaglianza è uno degli assiomi. Usando gli assiomi di associatività e commutatività della somma fra vettori, possiamo riscrivere questa uguaglianza come

$$v + (w + (-v)) = w$$

e sfruttando l'uguaglianza $-v = -w$ possiamo rimpiazzare $-v$ con $-w$, ottenendo

$$v + (w + (-w)) = w$$

Visto che $w + (-w) = O$ grazie a uno degli assiomi, deduciamo

$$v + O = w$$

e grazie allo stesso assioma concludiamo l'uguaglianza voluta

$$v = w$$

Esercizio 6. Determinare se le seguenti sono basi di V:

(1) $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, dove $V = \mathbb{R}^3$ e

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, dove $V = \mathbb{R}^5$ e

$$u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(3) $\mathcal{B}_3 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, dove $V = \mathbb{R}^4$ e

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In caso negativo, dire quale delle due condizioni fallisce, cioè se non sono generatori di $\mathbb{R}^n$, oppure se non sono linearmente indipendenti, oppure entrambe le cose.

Soluzione esercizio 6. (1) Sicuramente $\mathcal{B}_1$ non è una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti i quattro vettori dovrebbero essere linearmente indipendenti, e questo non è possibile perché il loro numero è maggiore del numero delle entrate di ciascuno. (Per riusare i simboli che avevamo a lezione, abbiamo k vettori in $\mathbb{R}^n$ e siamo nel caso $k > n$.)

Dobbiamo capire se sono generatori oppure no. Cioè dovremmo capire se, dato un <u>qualunque</u> vettore $v \in \mathbb{R}^3$, esistono coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

Poniamo tali coefficienti come incognite x_1, x_2, x_3, x_4, e diamo nomi alle entrate di v, scrivendo

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Allora ci stiamo chiedendo se il sistema

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ha *sempre soluzione*, qualsiasi siano b_1, b_2, b_3. Per farlo, abbiamo diverse scelte. Potremmo usare il teorema di Rouché-Capelli, oppure cercare di risolvere il sistema con Gauß, anche se non conosciamo i termini noti. Applichiamo questo metodo, che è più concreto.

Il sistema ha matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & b_2 \\ 1 & 9 & 8 & 4 & b_3 \end{pmatrix}$$

Applichiamo l'operazione elementare di riga $R_3 \to R_3 - R_1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & b_2 \\ 0 & 8 & 8 & 4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & b_3 - b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}$$

I pivot sono tre, e nessuno di essi può essere nell'ultima colonna. Per cui il sistema ha sempre soluzione, cioè esiste sempre una scelta per i coefficienti cercati $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. In altre parole, i quattro vettori sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Anche questi vettori non possono essere una base, infatti $u_1 = u_4$, per cui sicuramente sono linearmente dipendenti. Facciamo lo stesso ragionamento di prima per capire se almeno sono generatori, oppure no.

Scriviamo un vettore qualunque di $\mathbb{R}^5$ come

$$u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

e impostiamo il sistema come prima

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5 = u$$

Possiamo ridurre a scalini la matrice completa, e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 5 & b_2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -7 & b_5 - b_2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 14 & -2b_5 + b_4 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{205}{3} & \frac{4b_5}{3} - \frac{20b_4}{3} + b_3 - \frac{40b_2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{554b_5}{205} - \frac{203b_4}{164} - \frac{108b_3}{205} - \frac{40b_2}{41} + b_1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è a scalini sicuramente, ma il numero di pivot dipende dall'espressione che vediamo nell'angolo in basso a destra. Se è $\neq 0$, allora si tratta di un pivot, invece se è $= 0$ non si tratta di un pivot.

Questo vuol dire che il sistema non ha sempre soluzioni. Ne ha, se l'entrata in basso a destra è uguale a zero. Ma se scegliamo i termini noti ad esempio $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ allora la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{205}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il sistema corrispondente non ha soluzioni! Quindi i vettori *non sono generatori*, perché non permettono di esprimere <u>ogni</u> vettore v di $\mathbb{R}^5$ come loro combinazione lineare.

(3) Abbiamo 4 vettori in $\mathbb{R}^4$, quindi il numero sarebbe "compatibile" con l'essere linearmente indipendenti. Lo sono, se il sistema

$$x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + x_4w_4 = O$$

ha *una sola soluzione*, quella tutta nulla $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Come abbiamo visto a lezione, questo è vero proprio quando il determinante della matrice $\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ che li ha per colonne è diverso da zero.

Calcoliamone il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32$$

quindi <u>sì</u>, i vettori sono linearmente indipendenti.

Vediamo se sono generatori. Ci chiediamo se possiamo scrivere un qualsiasi vettore

$$w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di w_1, w_2, w_3, w_4, cioè se ha sempre soluzione il sistema

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4 = w$$

Osserviamo che la matrice dei coefficienti A' è proprio $\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, e che è invertibile, per cui possiamo usare il teorema di Cramer: una soluzione esiste sempre (ed è unica), ed è ottenuta moltiplicando w a sinistra per l'inversa di A'. Cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Attenzione: *non è necessario* calcolare l'inversa di A'! Ci basta sapere che il sistema ha sempre soluzione, per cui i vettori sono generatori di $\mathbb{R}^4$. Concludiamo che $\mathcal{B}_3$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Attenzione: Dalla soluzione della parte (3) di questo esercizio ci rendiamo conto del fatto seguente: se partiamo da n vettori di $\mathbb{R}^n$ e vogliamo sapere se sono una base, allora calcoliamo il determinante della matrice che li ha per colonne. Come in questo esercizio, se il determinante è diverso da zero allora sono linearmente indipendenti (questo lo abbiamo visto a lezione), e sono anche generatori, grazie al teorema di Cramer! Questo fatto sarà visto (o è stato visto) anche a lezione.

Esercizio 7. Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dell'esercizio precedente. Scartare alcuni dei vettori in modo che i rimanenti formino una base di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione esercizio 7. Non possiamo scartare v_4, perché se prendiamo i rimanenti v_1, v_2, v_3 e li mettiamo come colonne di una matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

troviamo che questa matrice ha determinante nullo. Quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. D'altronde si può anche vedere "a occhio" che $v_2 = v_1 + v_3$, quindi $v_1 - v_2 + v_3 = O$.

Se invece scartiamo v_3, e mettiamo i rimanenti vettori in una matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

allora otteniamo una matrice di determinante 32, per cui (v_1, v_2, v_4) è una base.

Esercizio 8. Consideriamo i vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente. Trovare dei vettori tali che, presi assieme a v_1 e v_2, formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione esercizio 8. Abbiamo bisogno di un solo vettore in più. Lo scegliamo in modo che, messo come terza colonna di una matrice dopo v_1 e v_2, dia una matrice invertibile. Scegliamolo il più possibile semplice, in modo che sia facile calcolare il determinante. Per esempio

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo: il determinante di

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

è -4, per cui in effetti (v_1, v_2, v) è una base.

Esercizio 9. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Trovare una base di V diversa da $(1, x, x^2, x^3)$.

Soluzione esercizio 9. La base dipende dall'ordine in cui prendiamo i vettori, però le proprietà di essere generatori e di essere linearmente indipendenti non dipendono dall'ordine in cui prendiamo i vettori.

Questo vuol dire che $(x, 1, x^2, x^3)$ è una base di V, perché questi quattro vettori sono linearmente indipendenti e sono generatori. Però è una base diversa da $(1, x, x^2, x^3)$.

Esercizio 10. Dimostrare che esistono infinite basi di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione esercizio 10. Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove t è un qualsiasi numero reale. Qualsiasi sia il valore del parametro t, la matrice che ha per colonne questi due vettori ha determinante 1, quindi è invertibile. Concludiamo come per gli esercizi precedenti che (v_1, v_2) è una base.

D'altronde v_2 dipende da t, e valori distinti di t danno vettori v_2 diversi. Quindi, avendo infinite scelte diverse a disposizione per t, abbiamo infiniti vettori diversi v_2, e infinite basi diverse (v_1, v_2).