Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.3

10.10.2019

Esercizio 1. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ ha soluzioni *non nulle* il seguente sistema in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$BX = \lambda X$$

(Nota: non si richiede di trovare le soluzioni.)

Esercizio 2. Determinare se le tre k-uple di vettori seguenti sono linearmente dipendenti, e, se sì, trovare dei coefficienti non tutti nulli in modo che la combinazione lineare dei vettori con questi coefficienti sia uguale al vettore nullo.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2-\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

e i vettori

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta.

(1) È possibile che l'insieme vuoto sia uno spazio vettoriale?
(2) È possibile che un insieme con solo un elemento sia uno spazio vettoriale?
(3) È possible che un insieme con solo due elementi sia uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)?

Esercizio 5. Siano v, w elementi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare, usando solo gli assiomi di spazio vettoriale, che se gli opposti $-v$ e $-w$ sono uguali, allora v e w sono uguali.

Esercizio 6. Determinare se le seguenti sono basi di V:

(1) $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, dove $V = \mathbb{R}^3$ e

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, dove $V = \mathbb{R}^5$ e

$$u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(3) $\mathcal{B}_3 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, dove $V = \mathbb{R}^4$ e

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In caso negativo, dire quale delle due condizioni fallisce, cioè se non sono generatori di $\mathbb{R}^n$, oppure se non sono linearmente indipendenti, oppure entrambe le cose.

Esercizio 7. Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dell'esercizio precedente. Scartare alcuni dei vettori in modo che i rimanenti formino una base di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 8. Consideriamo i vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente. Trovare dei vettori tali che, presi assieme a v_1 e v_2, formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 9. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Trovare una base di V diversa da $(1, x, x^2, x^3)$.

Esercizio 10. Dimostrare che esistono infinite basi di $\mathbb{R}^2$.