Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.2

3.10.2019

Esercizio 1. Trovare le matrici inverse, se esistono, delle matrici
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Trovare i valori del parametro β per cui la matrice
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3\beta & 1 \\ \beta - 1 & -1 \end{pmatrix}$$
è invertibile.

Esercizio 3. Trovare le matrici inverse, se esistono, delle matrici
$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Risolvere il sistema di equazioni lineari
$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici
$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
trovare le soluzioni dei seguenti sistemi in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:
$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$AX = 3X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Calcolare il rango delle seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Calcolare il rango del tabellone della tombola:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \dots & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & \dots & 28 & 29 & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 71 & 72 & 73 & \dots & 78 & 79 & 80 \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 88 & 89 & 90 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Sia A una matrice quadrata $p \times p$. Calcolare il determinante della matrice $-A$. Dimostrare inoltre che se p è dispari e A è antisimmetrica, allora A non è invertibile.

Esercizio 11. Si consideri un vettore colonna qualsiasi

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

e il prodotto $P = C \cdot C^t$, che è una matrice 3×3.

(1) Dimostrare che $\det(P) = 0$.
(2) Dimostrare che[1] $\mathrm{rg}(P) \leq 1$.

Esercizio 12. Trovare due numeri interi positivi p, q, e due matrici A, B, entrambe $p \times q$, che hanno lo stesso rango ma B non si può ottenere da A tramite operazioni elementari di riga.

[1] La prima domanda è facile, invece questa seconda domanda è piuttosto difficile.