Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.1

Esercizio 1. Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi a scalini, nelle variabili x, y, z:

$$S_1 \begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ 2y + z & = & -1 \\ -2z & = & 3 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + y + z & = & -3 \\ -5y - 8z & = & 4 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 1. Iniziamo da S_1. Un sistema a scalini si risolve "dal basso verso l'alto", infatti l'ultima equazione fornisce sempre il valore di una delle incognite (spesso l'ultima incognita, ma non sempre!), in questo caso

$$z = -\frac{3}{2}$$

Possiamo sostituire questo valore nella penultima equazione, ottenendo

$$2y + \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

cioè

$$y = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{3-2}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Continuiamo a sostituire i valori ottenuti nelle equazioni rimanenti, qui solo una, ottenendo

$$2x - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

cioè

$$2x = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

da cui ricaviamo anche l'incognita rimanente

$$x = \frac{7}{8}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è costituito da un solo elemento:

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Consideriamo S_2, applicando lo stesso metodo. Qui l'ultima equazione non fornisce un valore preciso alla y, la esprime solo "in funzione della z". E l'equazione precedente si può usare per esprimere la x "in funzione" delle altre. Per cui possiamo pensare che la terza incognita z non è soggetta ad alcun vincolo, e le possiamo attribuire un valore qualsiasi, mettiamo un numero reale t_3:

$$z = t_3$$

La seconda equazione ci dice che

$$-5y - 8t_3 = 4$$

Qui t_3 è un <u>numero</u> (anche se arbitrario), non un'incognita. Ricaviamo allora

$$y = -\frac{8t_3 + 4}{5} = -\frac{8t_3}{5} - \frac{4}{5}$$

Sostituiamo i valori trovati per y e z nell'equazione rimanente, ottenendo

$$x + \left(-\frac{8t_3}{5} - \frac{4}{5}\right) + (t_3) = -3$$

da cui ricaviamo

$$x = \frac{8t_3}{5} + \frac{4}{5} - t_3 - 3 = \left(\frac{8}{5} - 1\right) t_3 + \frac{4 - 15}{5} = \frac{3}{5}t_3 - \frac{11}{5}$$

Qui l'insieme delle soluzioni è costituito da infiniti elementi, corrispondenti agli infiniti valori che posso dare al parametro $t_3 \in \mathbb{R}$. Per semplicità possiamo anche scrivere t invece di t_3, dato che abbiamo solo un parametro. Allora possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5}t - \frac{11}{5} \\ -\frac{8t}{5} - \frac{4}{5} \\ t \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione lineare

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -5.$$

Trovare i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'elemento $(3 + \lambda, 2\lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ è una soluzione dell'equazione.

Soluzione esercizio 2. Sostituiamo le componenti alle variabili x_1, x_2 e x_3 rispettivamente, ottenendo

$$2(3 + \lambda) + 2\lambda - 1 = -5,$$

cioè

$$4\lambda = -12.$$

Deduciamo che $(3 + \lambda, 2\lambda, 1)$ è una soluzione dell'equazione data se e solo se $\lambda = -3$.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti matrici è a scalini, e in caso affermativo evidenziarne i pivot.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. La prima matrice non è a scalini, infatti il 2 nella prima riga è il primo elemento non nullo della riga, sotto di esso tutti gli elementi sono nulli, ma c'è un elemento non nullo sotto allo 0 (della prima riga) che precede il 2. La seconda è a scalini, con un pivot:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La terza è a scalini, con due pivot:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La quarta non è a scalini, perché l'1 sulla terza riga è il primo elemento non nullo della riga, ma sotto di esso cè un elemento non nullo.

La quinta matrice non è a scalini, perché sotto la terza riga, che è tutta nulla, c'è una riga che non è tutta nulla (la quarta riga ha un'entrata non nulla).

Esercizio 4. Trovare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui la matrice seguente è a scalini

$$A_t = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ t - 1 & 2 & 4t \\ 0 & -t + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Cerchiamo di capire, riga per riga, dove potrebbero essere i pivot, cioè le prime entrate non nulle partendo da sinistra, al variare del parametro t.

Iniziamo dalla prima riga. Vediamo subito che, se $t = 0$, la riga è tutta nulla. In questo caso la matrice è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che non è a scalini.

Allora tanto vale assumere d'ora in poi che $t \neq 0$. In tal caso la prima riga ha un pivot, ed è la sua prima entrata. Sotto questo pivot devono esserci tutti zeri, ma questo non si verifica se $t \neq 1$. Cioè per $t \neq 1$ (e sempre ricordandoci che $t \neq 0$) la matrice ha entrate del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} (\neq 0) & (\neq 0) & 0 \\ (\neq 0) & (\neq 0) & (\neq 0) \\ 0 & (\neq 0) & (\neq 0) \end{pmatrix}$$

e una matrice siffatta non è a scalini.

Riassumendo: per $t = 0$ la matrice non è a scalini, e non è a scalini neppure se t è un numero reale diverso sia da 0 sia da 1.

Rimane da esaminare solo il caso in cui $t = 1$. In questo caso la matrice è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e questa matrice è a scalini. Concludiamo che l'unico valore di t per cui A_t è a scalini è $t = 1$.

Esercizio 5. Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono compatibili, e in caso affermativo trovarne le soluzioni:

$$S_1 \begin{cases} 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 - 3x_2 & = & 0 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 3x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \\ 5x_1 + x_2 & = & 7 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ 3x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 5. Risolviamo il sistema S_1. Abbiamo 3 incognite: x_1, x_2, x_3. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Usiamo operazioni elementari di riga per trasformarla in una matrice a scalini. Scambiamo la prima e la seconda riga (cioè $R_1 \leftrightarrow R_2$), ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sommiamo alla terza riga la prima ($R_3 \to R_3 + R_1$), ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

A questo punto la prima colonna è “a posto”, secondo l'algoritmo di Gauß: inizia con un numero non nullo, e sotto ha solo zeri. Ignoriamo allora la prima colonna e la prima riga, e procediamo con la seconda colonna.

Sommiamo alla terza riga la seconda ($R_3 \to R_3 + R_2$), ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini. Ci sono 3 pivot, e l'ultimo è nella colonna dei termini noti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{array}\right).$$

Per questo il sistema *non è compatibile*, cioè non ha soluzioni. In simboli:

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \varnothing$$

(i.e. l'insieme delle soluzioni è vuoto).

Risolviamo il sistema S_2 con lo stesso metodo. Incognite: x_1, x_2. Matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Operazioni elementari di riga: non è necessario, ma è comodo scambiare prima di tutto R_1 con R_2, cioè $R_1 \leftrightarrow R_2$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

A qusto punto facciamo $R_2 \to R_2 - 3R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

e $R_3 \to R_3 - 5R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Prima colonna: ok. Usiamo ora $R_3 \to R_3 - 3R_2$, e otteniamo la matrice a scalini seguente, con 2 pivot:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il numero di pivot è uguale al numero di incognite. Per cui la soluzione è unica, ed è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & -1 \\ 2x_2 & = & 4 \\ 0x_1 + 0x_2 & = & 0 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema dato S_2. Troviamola risolvendo dal basso verso l'alto. La terza equazione può essere ignorata, la seconda implica $x_2 = 2$, e sostituendo questo valore nella prima otteniamo

$$x_1 - 2 = -1$$

cioè $x_1 = 1$. L'insieme delle soluzioni allora ha un solo elemento, che possiamo scrivere come vettore colonna con entrate 1 e 2. In simboli:

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sistema S_3. Incognite: x_1, x_2, x_3, x_4. Matrice completa, operazioni elementari di riga, pivot:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_2 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & -\frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Tre pivot (nelle colonne di x_1, x_2, x_3 rispettivamente), nessuno nella colonna dei termini noti, quattro incognite: quindi abbiamo infinite soluzioni, che dipendono da un parametro ($1 = 4 - 3$). Come parametro possiamo prendere la variabile che non corrisponde a nessun pivot, cioè x_4. Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_3 - \frac{15}{2}x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Assegnamo ad x_4 un valore qualsiasi, diciamo $s_4 \in \mathbb{R}$, e ricaviamo le altre risolvendo dal basso verso l'alto:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & s_4 \\ x_3 & = & 15s_4 \\ x_2 & = & \frac{-x_3-5s_4}{2} = \frac{-15s_4-5s_4}{2} = -10s_4 \\ x_1 & = & 1 + 2x_2 = 1 - 20s_4 \end{array}$$

L'insieme delle soluzioni allora è

$$\mathrm{Sol}(S_3) = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1-20s_4 \\ -10s_4 \\ 15s_4 \\ s_4 \end{array} \right) \middle| s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sistema S_4. Incognite: x_1, x_2, x_3, x_4. Matrice completa, operazioni elementari di riga, pivot:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Quattro incognite, due pivot, nessuno nella colonna dei termini noti: abbiamo infinite soluzioni, che dipendono da due parametri. Ad esempio prendiamo x_3 ed x_4 come parametri (cioè "libere"), e ricaviamo le altre.

Il sistema equivalente che abbiamo ottenuto è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{cases}$$

Assegnamo ad x_3 ed x_4 valori arbitrari, diciamo $s_3, s_4 \in \mathbb{R}$, e risolviamo dal basso verso l'alto:

$$\begin{aligned} x_4 &= s_4 \\ x_3 &= s_3 \\ x_2 &= 3 - 2x_3 - 3x_4 = 3 - 2s_3 - 3s_4 \\ x_1 &= x_2 + x_3 - 2x_4 = (3 - 2s_3 - 3x_4) + s_3 - 2s_4 = 3 - s_3 - 5s_4 \end{aligned}$$

L'insieme delle soluzioni allora è

$$\mathrm{Sol}(S_4) = \left\{ \left(\begin{array}{c} 3 - s_3 - 5s_4 \\ 3 - 2s_3 - 3s_4 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \right) \middle| s_3, s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 6. Trovare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare

$$S \begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 &= 0 \\ (1-\alpha)x_1 - x_2 &= 1 \end{cases}$$

è compatibile.

Soluzione esercizio 6. La matrice completa del sistema è

$$C = \left(\begin{array}{ccc} 2 & \alpha & 0 \\ (1-\alpha) & -1 & 1 \end{array} \right).$$

A seconda del valore di α, la matrice potrebbe essere a scalini oppure no. Possiamo però ridurla ad una forma sicuramente a scalini con l'operazione $R_2 \to R_2 - \frac{1-\alpha}{2} R_1$, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 - \frac{1-\alpha}{2}\alpha & 1 \end{array} \right)$$

che è uguale a

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Questa matrice è sicuramente a scalini, per qualsiasi valore di α. I pivot sono due, ma attenzione: per tutti i valori di α per cui $\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} \neq 0$, i pivot sono

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \alpha & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2}} & 1 \end{array} \right).$$

Nessuno dei due è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema è compatibile.

Se invece $\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} = 0$, cioè per $\alpha = -1$ oppure per $\alpha = 2$, la matrice allora si può scrivere come

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

I pivot sono sempre 2, ma sono
$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$
Uno dei pivot qui è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema è incompatibile.

Esercizio 7. Dire quando i prodotti AB, BA, CD e DC sono definiti, e in caso affermativo calcolarli, per le seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 7. La matrice A è 2×3 e la matrice B è 2×2. Quindi il prodotto AB *non* è definito, mentre il prodotto BA è definito ed è una matrice 2×3:
$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Le matrici C e D sono 3×3, per cui entrambi i prodotti CD e DC sono definiti. Valgono
$$CD = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$DC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & -8 & 13 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Sia data la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Trovare tutte le matrici 2×2 che commutano con C, cioè tutte le matrici D tali che $CD = DC$.

Soluzione esercizio 8. Scriviamo una matrice D con delle incognite al posto delle entrate:
$$D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$
Allora la condizione $CD = DC$ si può scrivere come
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
cioè
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -x+z & -y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 2z-w & w \end{pmatrix}$$
Due matrici sono uguali se e solo se tutte le loro entrate sono uguali, per cui l'equazione qui sopra si può scrivere come un sistema:
$$\begin{cases} 2x & = & 2x-y \\ 2y & = & y \\ -x+z & = & 2z-w \\ -y+w & = & w \end{cases}$$
Portiamo tutte le variabili al primo membro:
$$\begin{cases} y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ -x-z+w & = & 0 \\ -y & = & 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile: abbiamo $y = 0$, e possiamo ricavare ad esempio x in funzione di z e w. In altre parole

$$\begin{array}{rcl} x & = & -z + w \\ y & = & 0 \end{array}$$

Assegnamo valori arbitrari a z e w, diciamo numeri reali rispettivamente $s, t \in \mathbb{R}$, e concludiamo che le matrici D che commutano con C sono tutte le matrici della forma

$$D = \begin{pmatrix} t - s & 0 \\ s & t \end{pmatrix}$$

per valori arbitrari $s, t \in \mathbb{R}$. Come al solito, possiamo scrivere l'insieme di queste matrici nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t - s & 0 \\ s & t \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 9. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

cioè B ha le entrate tutte uguali a zero, tranne quelle sulla diagonale principale, che sono uguali a λ. Si dimostri che

$$AB = BA$$

Soluzione esercizio 9. Denotiamo con $a_{i,j}$ le entrate di A, al variare degli indici di riga e di colonna i e j. Facciamo la stessa cosa con B, denotando le sue entrate $b_{i,j}$. Sappiamo com'è fatta B: le entrate $b_{1,1}$, $b_{2,2}$, $b_{3,3}$ fino a $b_{n,n}$ sono tutte uguali a λ, mentre se $i \neq j$ allora l'entrata $b_{i,j}$ non è sulla diagonale, e allora $b_{i,j} = 0$.

Chiamiamo C il prodotto AB. L'entrata $c_{i,j}$ di C alla riga i e colonna j è data dalla solita formula

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,n} b_{n,j} = \dots$$

Ora: quasi tutti i b che compaiono in questa formula sono nulli. L'unico che potrebbe essere non nullo è quello in cui gli indici di riga e di colonna sono uguali. Fra i b qui sopra, l'unico con i due indici uguali è $b_{j,j}$, che è uguale a λ.

Perciò l'uguaglianza prosegue così:

$$\dots = a_{i,j} b_{j,j} = \lambda a_{i,j}$$

Chiamiamo ora D il prodotto BA. L'entrata $d_{i,j}$ di D alla riga i e colonna j è data dalla stessa formula, in cui però A e B sono prese in ordine inverso:

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = b_{i,1} a_{1,j} + b_{i,2} a_{2,j} + \dots + b_{i,n} a_{n,j} = \dots$$

Di nuovo, quasi tutti i b che compaiono in questa formula sono nulli. Stavolta l'unico forse non nullo è $b_{i,i}$, che è uguale anch'esso a λ.

Perciò l'uguaglianza prosegue così:

$$\dots = b_{i,i} a_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Quindi le due matrici C e D hanno le stesse entrate, per cui sono uguali.

Esercizio 10. Siano A e B due matrici $n \times n$. Ricordiamo che la traccia di una matrice (denotata $\mathrm{tr}(A)$) è la somma degli elementi sulla diagonale principale. Si dimostri che

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Soluzione esercizio 10. Denotiamo come nell'esercizio precedente le entrate di A come $a_{i,j}$, quelle di B come $b_{i,j}$, quelle di AB come $c_{i,j}$ e quelle di BA come $d_{i,j}$.

Scriviamo la traccia di AB:

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(AB) = c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + \ldots + c_{n,n} = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_{k,2} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}b_{k,n} = \\ = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} + \\ + a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + \ldots + a_{2,n}b_{n,2} + \\ + \ldots + \\ + a_{n,1}b_{1,n} + a_{n,2}b_{2,n} + \ldots + a_{n,n}b_{n,n}\end{gathered}$$

Scriviamo la traccia di BA:

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(BA) = d_{1,1} + d_{2,2} + d_{3,3} + \ldots + d_{n,n} = \\ = \sum_{k=1}^{n} b_{1,k}a_{k,1} + \sum_{k=1}^{n} b_{2,k}a_{k,2} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}a_{k,n} = \\ = b_{1,1}a_{1,1} + b_{1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{1,n}a_{n,1} + \\ + b_{2,1}a_{1,2} + b_{2,2}a_{2,2} + \ldots + b_{2,n}a_{n,2} + \\ + \ldots + \\ + b_{n,1}a_{1,n} + b_{n,2}a_{2,n} + \ldots + b_{n,n}a_{n,n}\end{gathered}$$

Ora, gli addendi nei due casi sono gli stessi, solo riordinati. Quelli che compaiono "in riga" per AB compaiono "in colonna" per BA. Per cui $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Un altro modo per dimostrare l'uguaglianza voluta è scrivere tutto con due simboli di sommatoria, uno al variare dell'indice k (come qui sopra), e l'altro al variare di un altro indice h. Si ottiene

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(AB) = c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + \ldots + c_{n,n} = \\ \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{h,k}b_{k,h} \right)\end{gathered}$$

Questa formula significa semplicemente che stiamo sommando, al variare di tutti i possibili h e k fra 1 ed n, gli elementi $a_{h,k}b_{k,h}$. Calcoliamo l'altra traccia:

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(BA) = d_{1,1} + d_{2,2} + d_{3,3} + \ldots + d_{n,n} = \\ \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{h,k}a_{k,h} \right)\end{gathered}$$

cioè la sommatoria, al variare di tutti i possibili h e k fra 1 ed n, degli elementi $b_{h,k}a_{k,h}$. È evidente che le due somme sono uguali, basta scambiare nella seconda "h" con "k".