Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.12

Esercizio 1. Trovare la matrice 3×3 che corrisponde a un'isometria $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Dire, giustificando la risposta, se ne esiste anche una tale che

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 1. La matrice 3×3 che corrisponde ad f è della forma

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

cioè f manda un punto qualsiasi $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ nel punto $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dove

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

Possiamo anche scrivere equivalentemente

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix}$$

Cioè f è ottenuta facendo prima un'applicazione lineare $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di matrice canonica

$$Q = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

e poi una traslazione $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix}$$

In altre parole $f = f_2 \circ f_1$. Consideriamo ora anche l'applicazione inversa f_2^{-1}, che è semplicemente la traslazione per $-v_0$. Anch'essa è un'isometria, quindi $f_2^{-1} \circ f_2 \circ f_1$ è a sua volta un'isometria, perché componendo due isometrie si ottiene un'isometria. In altre parole f_1 dev'essere un'isometria, e abbiamo già visto esempi di applicazioni lineari che sono isometrie: quelle che hanno matrice canonica ortogonale. Cioè possiamo cercare f_1 di matrice canonica ortogonale.

Sappiamo che $f_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, perché f_1 è lineare. Quindi dovremo avere

$$f_2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Questo ci dice che

$$v_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Rimane da trovare f_1. Abbiamo

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = f_2\left(f_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right) = f_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

da cui segue

$$f_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

È facile dare un'applicazione lineare f_1 con matrice canonica ortogonale che manda $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un metodo generale è questo: si completa $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ad una base ortogonale (v_1, v_2), poi si normalizza ottenendo $(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2)$. Si fa lo stesso partendo da $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ottenendo $(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$. Poi si impone che f_1 soddisfi $f(\widetilde{v}_1) = \widetilde{w}_1$, $f(\widetilde{v}_2) = \widetilde{w}_2$.

Qui un modo ancora più semplice è prendere $f_1(v) = -v$ per ogni v. La matrice canonica di questa f_1 è

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concludiamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invece un'isometria $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non esiste. Infatti un'isometria deve rispettare la distanza fra punti, ma

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

mentre

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

per cui f dovrebbe mandare due punti a distanza $\sqrt{2}$ l'uno dall'altro in due punti a distanza $\sqrt{5}$ l'uno dall'altro: impossibile.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$2x + y = 0$$

Trovare la matrice canonica della *riflessione rispetto a U*, cioè dell'applicazione lineare ortogonale $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che lascia fissi i vettori di U, e tale che $f(v) = -v$ per ogni vettore v ortogonale ad U.

Soluzione esercizio 2. Abbiamo visto a lezione un'espressione esplicita per f, e cioè

$$f(v) = v - 2\frac{\langle v, v_0 \rangle}{\langle v_0, v_0 \rangle} v_0$$

dove v_0 è un vettore non nullo ortogonale a U. Possiamo dedurre v_0 dall'equazione di U come al solito, prendendo i coefficienti delle incognite:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

quindi la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Trovare le coordinate del punto

$$p = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

rispetto al sistema di riferimento affine $\mathcal{R} = (p_0, v_1, v_2)$ dove

$$p_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e v_1, v_2 sono ottenuti dalla base canonica con una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario.

Soluzione esercizio 3. Troviamo prima di tutto v_1, v_2. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in senso antiorario. Allora f ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e che v_1 e v_2 sono ottenuti da e_1 ed e_2 applicando f. Quindi

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Le coordinate di p rispetto ad $\mathcal{R}$ sono le coordinate del vettore $p - p_0$ (che va da p_0 a p) nella base (v_1, v_2). Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$xv_1 + yv_2 = p - p_0$$

nelle incognite x, y. La soluzione unica è

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -4\sqrt{2} \end{cases}$$

perciò queste sono le coordinate di p rispetto ad $\mathcal{R}$.

Esercizio 4. Trovare un'equazione della circonferenza in $\mathbb{R}^2$ contenente i punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Sappiamo che una circonferenza in $\mathbb{R}^2$ ha equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

dove $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è il centro, ed r è il raggio. Vanno trovati x_0, y_0, r.

Esplicitando i quadrati, si ottiene

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

dove $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Visto che l'esercizio chiede di trovare l'equazione, tanto vale trovare direttamente a, b, c invece di x_0, y_0, r.

Imponiamo che la circonferenza contenga i punti p_1, p_2, p_3. Con p_1 otteniamo

$$0^2 + a \cdot 0 + 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$$

cioè $c = 0$. Rimangono da trovare a e b, imponendo il passaggio per p_2 e p_3. Otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} 2^2 + 2a + 2^2 + 2b + 0 = 0 \\ 1^2 + a + (-3)^2 - 3b + 0 = 0 \end{cases}$$

che hanno soluzione

$$\begin{cases} a = -\frac{11}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

L'equazione cercata allora è

$$x^2 + y^2 - \frac{11}{2}x + \frac{3}{2}y = 0$$

Esercizio 5. Trovare l'equazione della sfera di centro

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e che contiene il punto

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. La sfera ha raggio r uguale alla distanza fra c e p, cioè

$$r = d(c,p) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Quindi un'equazione è

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 14$$

cioè

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z + 7 = 0$$

Esercizio 6. Scrivere le coniche seguenti in forma canonica:

$$C_1 \colon x^2 + 3xy - y^2 + 2x + 1 = 0$$

$$C_2 \colon 4x^2 - 4xy + y^2 + x - y = 0$$

Soluzione esercizio 6. La prima conica ha matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

$$\det(Q_1) = -\frac{13}{4}, \qquad \operatorname{tr}(Q_1) = 0, \qquad \det(A_1) = -\frac{9}{4}$$

Siano λ_1, λ_2 gli autovalori di Q_1 (non necessariamente distinti). Sappiamo che sono uno negativo e uno positivo, perché il loro prodotto è $-\frac{13}{4}$, cioè negativo. La loro somma è 0, per cui sono uno l'opposto dell'altro. Allora, chiamando λ_1 quello positivo, abbiamo

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Quindi, nelle nuove coordinate X, Y, la conica C_1 avrà forma canonica

$$\frac{\sqrt{13}}{2} X^2 - \frac{\sqrt{13}}{2} Y^2 + (\text{grado } 1) + (\text{grado } 0) = 0$$

Completando i quadrati, nella procedura spiegata a lezione, abbiamo allora potuto eliminare la parte di grado 1 sia in X, sia in Y. Per cui la forma canonica in effetti sarà

$$\frac{\sqrt{13}}{2} X^2 - \frac{\sqrt{13}}{2} Y^2 + c = 0$$

per qualche termine noto c. La matrice 3×3 nelle nuove variabili sarà

$$A_1' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e dato che il determinante di A_1' è uguale al determinante di A_1, deduciamo che

$$\det(A_1') = -\frac{13}{4} c = -\frac{9}{4} = \det(A_1)$$

da cui otteniamo

$$c = \frac{9}{13}$$

Deduciamo la forma canonica di C_1:

$$\frac{\sqrt{13}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{13}}{2}Y^2 + \frac{9}{13} = 0$$

La seconda conica ha matrici

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

$$\det(Q_2) = 0, \qquad \operatorname{tr}(Q_2) = 5, \qquad \det(A_2) = -\frac{1}{4}$$

Dal fatto che $\det(Q_2)$ è 0 deduciamo che uno degli autovalori di Q_2 è $\lambda_2 = 0$. L'altro, λ_1, lo troviamo osservando che la loro somma è la traccia di Q_2: otteniamo $\lambda_1 = 5$.

Per cui otterremo una forma canonica del tipo

$$5X^2 + (\text{grado } 1) + (\text{grado } 0) = 0$$

Il grado 1 non contiene la X, perché abbiamo potuto completare il quadrato usando X^2 ed eliminare la parte di grado 1 in X. Allora la forma canonica sarà del tipo

$$5X^2 + aY + b = 0$$

per qualche $a, b \in \mathbb{R}$.

La matrice, nelle nuove coordinate, sarà

$$A_2' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & b \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è uguale a $\det(A_2)$, in altre parole

$$-\frac{5}{4}a^2 = \det(A_2') = \det(A_2) = -\frac{1}{4}$$

Segue $a^2 = \frac{1}{5}$, cioè $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ oppure $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Entrambi i valori vanno bene: corrisponderanno a due scelte diverse di coordinate. Prendiamo $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, quindi l'equazione nelle nuove variabili X, Y è

$$5X^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}Y + b = 0$$

A questo punto sappiamo anche che, con uno dei cambiamenti delle coordinate visti per le coniche, si poteva eliminare il termine noto. Per cui $b = 0$, e otteniamo la forma canonica per C_2:

$$5X^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}Y = 0$$

Esercizio 7. Per la conica C_2 dell'esercizio precedente, scrivere il cambio di coordinate da quelle usuali x, y alle coordinate X, Y in cui la conica è in forma canonica. Trovare anche il sistema di riferimento affine per cui le coordinate dei punti sono X, Y.

Soluzione esercizio 7. Abbiamo già calcolato gli autovalori di Q_2, cioè 5 e 0. I rispettivi autovettori si trovano col solito metodo, e otteniamo

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vanno ortonormalizzati. Sono già ortogonali, perché sono autovettori della matrice simmetrica Q_2 e hanno autovalori diversi, quindi basta normalizzarli. Otteniamo

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora le coordinate di un punto $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto a questa base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, chiamiamole x', y'. Cioè

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(p)$$

La solita formula con la matrice del cambiamento di base ci dice che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

Sostituendo nella conica, otteniamo l'equazione

$$5(x')^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' = 0$$

Questo è in accordo con la forma canonica che avevamo trovato nella soluzione precedente, l'unica differenza è che qui ancora non abbiamo "completato il quadrato" per eliminare il termine di primo grado in x'. Facciamolo, usando una traslazione lungo la coordinata x'. Cioè consideriamo le nuove coordinate

$$\begin{cases} x' &= x'' + t \\ y' &= y'' \end{cases}$$

e scegliamo t in modo che l'equazione in queste coordinate non contenga la x al primo grado. Intanto sostiuiamo, ottenendo

$$5(x'' + t)^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}(x'' + t) - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' = 0$$

ovvero

$$5(x'')^2 + \left(10t + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)x' + 5t^2 + \frac{3t}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

Imponiamo allora

$$10t + \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$$

ottenendo

$$t = -\frac{3}{10\sqrt{5}}$$

Sostituendo questo valore di t nell'equazione della conica otteniamo

$$5(x'')^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{9}{100} = 0$$

Finalmente, rimane un ultimo cambio di coordinate per eliminare il termine noto che è comparso. Usiamo una traslazione lungo y'', ponendo

$$\begin{cases} x'' &= X \\ y'' &= Y + s \end{cases}$$

Sostituendo, otteniamo la nuova equazione della conica

$$5X^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}Y - \frac{1}{\sqrt{5}}s - \frac{9}{100} = 0$$

Imponiamo dunque

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}s - \frac{9}{100} = 0$$

ottenendo

$$s = -\frac{9\sqrt{5}}{100}$$

Ora esplicitiamo la relazione fra le vecchie coordinate x, y e le nuove X, Y. Sostituendo x' e y' nel primo cambio di coordinate, otteniamo

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}(x'' - \frac{3}{10\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}(x'' - \frac{3}{10\sqrt{5}}) + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

e sostituendo x'' e y'' otteniamo

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{10\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(Y - \frac{9\sqrt{5}}{100}\right) \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{10\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(Y - \frac{9\sqrt{5}}{100}\right) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y - \frac{21}{100} \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y - \frac{3}{25} \end{cases}$$

Per scrivere X, Y in funzione di x, y, possiamo sfruttare il fatto che la matrice di passaggio che abbiamo usato è ortogonale, cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Scriviamo allora

$$\begin{cases} x + \frac{21}{100} &= \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y + \frac{3}{25} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x + \frac{21}{100} \\ y + \frac{3}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

e moltiplicando a sinistra per l'inversa della matrice di passaggio otteniamo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{21}{100} \\ y + \frac{3}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{21}{100} \\ y + \frac{3}{25} \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} X &= \frac{2}{\sqrt{5}}(x + \frac{21}{100}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(y + \frac{3}{25}) = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{3}{10\sqrt{5}} \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x + \frac{21}{100}) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y + \frac{3}{25}) \end{cases}$$

e il risultato finale è

$$\begin{cases} X &= \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{3}{10\sqrt{5}} \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{9}{20\sqrt{5}} \end{cases}$$

L'ultima cosa da determinare è il sistema di riferimento affine $\mathcal{R} = (p_0, v_1, v_2)$. Sappiamo già che v_1 e v_2 sono gli autovettori (ortonormalizzati) di Q_2, quindi li abbiamo già trovati.

Rimane da determinare p_0, e sfruttiamo l'osservazione seguente: p_0 è il punto che ha coordinate $X = 0$, $Y = 0$. Basta allora sostituire per trovare x e y di p_0, cioè le sue entrate. Risulta

$$p_0 = \begin{pmatrix} -\frac{21}{100} \\ -\frac{3}{25} \end{pmatrix}$$