Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.11

Esercizio 1. Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contenente i punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 1. Usiamo la formula vista a lezione. Sia

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^3$: consideriamo le sue entrate come incognite. La condizione che p appartenga al piano π è che i quattro punti p_1, p_2, p_3, p siano complanari, e cioè

$$\begin{vmatrix} 1-2 & 1-(-1) & 1-x \\ 0-1 & 0-1 & 0-y \\ -1-0 & -1-1 & -1-z \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1-x \\ -1 & -1 & -y \\ -1 & -2 & -1-z \end{vmatrix} = 0$$

e otteniamo

$$-x + 4y - 3z - 2 = 0$$

Esercizio 2. Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ contenente i punti

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Soluzione esercizio 2. Iniziamo dalle equazioni parametriche: basta prendere come termini noti le entrate di uno dei due punti, ad es. p, e come coefficienti del parametro le entrate di un vettore direttore, ad es. $v = p - q$. Abbiamo

$$v = p - q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

e otteniamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= t+1 \\ z &= -4t-1 \end{cases}$$

La retta contiene p, che corrisponde al valore del parametro $t = 0$, e contiene q, che corrisponde al valore del parametro $t = -1$.

Per ricavare equazioni cartesiane, eliminiamo il parametro t in due modi diversi. Otterremo due equazioni lineari, linearmente indipendenti, che definiscono r. Usando la seconda equazione parametrica ricaviamo

$$t = y - 1$$

che possiamo sostituire nella prima e nella terza:

$$\begin{cases} x &= 2(y-1) \\ z &= -4(y-1)-1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - 2y + 2 &= 0 \\ 4y + z - 3 &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Siano p e q come nell'esercizio precedente. Calcolare la distanza fra il punto medio del segmento fra p e q e il piano π di equazione

$$x + y + 1 = 0$$

Soluzione esercizio 3. Il punto medio del segmento che va da p a q si ottiene nel modo seguente. Consideriamo $v = p - q$: si tratta del vettore che va da q a p, cioè

$$p = q + v$$

Per ottenere il punto medio p', basta aggiungere a q il vettore $\frac{1}{2}v$, invece del vettore v:

$$p' = q + \frac{1}{2}v = q + \frac{p-q}{2} = \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La distanza fra p' e π si calcola trovando prima la retta s ortogonale a π e contenente p'. Poi si interseca π con s, trovando un punto q_0, infine si calcola la distanza fra p' e q_0.

La retta s ha equazioni parametriche ottenute nel modo seguente: si prendono i parametri di giacitura di π e li si mettono come parametri direttori di s. Così si ottiene una retta ortogonale a π. Poi si impone che contenga p', prendendolo come termini noti. Otteniamo

$$\begin{cases} x &= t - 1 \\ y &= t + \frac{1}{2} \\ z &= 0 \cdot t + 1 = 1 \end{cases}$$

Intersechiamo s e π per ottenere q_0, mettendo le equazioni di s e di π a sistema. Sostituendo le variabili x, y, z otteniamo

$$(t-1) + \left(t + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0, \quad t = -\frac{1}{4}$$

Quindi

$$q_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - 1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo la distanza fra p' e q_0, cioè la norma del vettore

$$w = p' - q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\|w\| = \sqrt{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

Esercizio 4. Trovare un vettore direttore della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x + z - 1 &= 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 4. Possiamo ricavare equazioni parametriche risolvendo il sistema. Un altro metodo è il seguente. Osserviamo che le due equazioni di r definiscono ciascuna un piano in $\mathbb{R}^3$, siano essi rispettivamente π_1 e π_2.

Sia v un vettore direttore di r. Allora v è contenuto in entrambi i sottospazi vettoriali soggiacenti a π_1 e π_2. Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che sono ottenuti dai rispettivi parametri di giacitura di π_1 e π_2. Allora v_1 è ortogonale a π_1, e v_2 è ortogonale a π_2.

Quindi v è ortogonale a entrambi. Dato che stiamo cercando v, basta trovare un vettore ortogonale a v_1 e a v_2, diverso dal vettore nullo. Possiamo prendere il prodotto vettoriale

$$v = v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 2 \\ e_2 & 1 & 0 \\ e_3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - e_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + e_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contenente r e il punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. Per trovare un piano contenente r che soddisfi altre condizioni, è comodo scrivere equazioni cartesiane di r. Troviamole eliminando il parametro in due modi. Un'equazione senza parametro c'è già: la terza. La seconda dà $t = y$, che possiamo sostituire nella prima. Otteniamo le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che un piano qualsiasi contenente r ha equazione

$$\alpha \cdot (x - 3y - 1) + \beta \cdot (z + 1) = 0$$

per dei valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Cerchiamo allora α e β tali che questa equazione sia soddisfatta se x, y, z sono le entrate del punto p, e cioè

$$\alpha \cdot (1 - 3(-2) - 1) + \beta \cdot (1 + 1) = 0, \quad 6\alpha + 2\beta = 0$$

Possiamo prendere $\alpha = -1$, $\beta = 3$, e otteniamo il piano π di equazione

$$-1(x - 3y - 1) + 3(z + 1) = 0$$

cioè

$$-x + 3y + 3z + 4 = 0$$

Esercizio 6. Determinare la distanza fra la retta r e la retta s, dove r ed s sono date dalle seguenti equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = t-2 \\ y = t+1 \\ z = -3t \end{cases}$$

$$s\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -t+2 \\ z = -3t-1 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 6. Ricordiamo che dobbiamo usare nei conti due parametri diversi. Prendiamo ad esempio t' invece di t nelle equazioni parametriche di s. Sappiamo che la distanza fra r ed s è uguale alla distanza fra due punti p_0, q_0 tali che

(1) $p_0 \in r$,
(2) $q_0 \in s$,
(3) il segmento da p_0 a q_0 è ortogonale sia ad r sia ad s.

I vettori direttori di r ed s sono rispettivamente v, w, dove

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il vettore che va da un punto qualsiasi p di r (individuato dal parametro t) ad un punto qualsiasi q di s (individuato dal parametro s), cioè il vettore $u = q - p$:

$$u = q - p = \begin{pmatrix} 2t' \\ -t' + 2 \\ -3t' - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t - 2 \\ t + 1 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t' - t + 2 \\ -t' - t + 1 \\ -3t' + 3t - 1 \end{pmatrix}$$

Imponiamo che sia perpendicolare a v e a w. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (2t' - t + 2) + (-t' - t + 1) - 3(-3t' + 3t - 1) & = & 0 \\ 2(2t' - t + 2) - (-t' - t + 1) - 3(-3t' + 3t - 1) & = & 0 \end{cases}$$

Otteniamo la soluzione

$$\begin{cases} t & = & \frac{4}{9} \\ t' & = & -\frac{1}{9} \end{cases}$$

che individua dunque i punti cercati p_0,q_0, basta sostituire questi valori rispettivamente nelle equazioni di r e di s:

$$p_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - 2 \\ \frac{4}{9} + 1 \\ -3 \cdot \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{13}{9} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$q_0 = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-\frac{1}{9}) \\ -(-\frac{1}{9}) + 2 \\ -3 \cdot (-\frac{1}{9}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{19}{9} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La loro distanza è il modulo del vettore $u_0 = q_0 - p_0$, e cioè

$$u_0 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} - (-\frac{14}{9}) \\ \frac{19}{9} - \frac{13}{9} \\ -\frac{2}{3} - (-\frac{4}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e abbiamo allora la distanza fra r ed s:

$$d(r, s) = \|u_0\| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Esercizio 7. Calcolare la proiezione ortogonale del punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sulla retta $r \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y - 2 & = & 0 \\ x + z + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 7. Un vettore direttore di r è un vettore v ortogonale ai vettori formati dai coefficienti delle incognite nelle due equazioni (infatti un v siffatto è parallelo ad entrambi i piani definiti dalle due equazioni, quindi è parallelo ad r).

Usiamo il prodotto vettoriale, ottenendo

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segue che un piano ortogonale ad r ha equazione cartesiana

$$-x - y + z + d = 0$$

Imponiamo che contenga p:

$$-1 - 1 + 0 + d = 0, \quad d = 2$$

Quindi il piano π ortogonale ad r e contenente p ha equazione

$$-x - y + z + 2 = 0$$

La proiezione ortogonale di p su r è l'intersezione di r con il piano π. Calcoliamola mettendo a sistema le equazioni di r e di π:

$$\begin{cases} x - y - 2 & = & 0 \\ x + z + 1 & = & 0 \\ -x - y + z + 2 & = & 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslazione per il vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione (lineare) ortogonale di matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Sia $h = f \circ g$, e dato

$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

scriviamo

$$h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Scrivere una matrice A tale che

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove A è 3×3.

Scrivere anche una matrice B tale che

$$\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove poniamo $k = g \circ f$ e scriviamo

$$k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 8. Abbiamo

$$h(p) = f(g(p)) = f(M \cdot p) = M \cdot p + v_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invece

$$k(p) = g(f(p)) = g(p + v_0) = M \cdot p + M \cdot v_0$$

per cui B è ottenuta come A, però mettendo all'ultima colonna $M \cdot v_0$ invece di v_0 (e come al solito aggiungendo un 1 come terza entrata). Ora

$$M \cdot v_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

per cui

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslazione per il vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e sia $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione ortogonale di matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia $\varphi = g \circ f \circ g^{-1}$. Dimostrare che anche φ è una traslazione per un qualche vettore w_0. Determinare w_0.

Soluzione esercizio 9. Sia $p \in \mathbb{R}^3$. Abbiamo

$$\varphi(p) = g(f(g^{-1}(p)))$$

Ora: g^{-1} è l'applicazione lineare di matrice canonica

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$g(p) = M^{-1} \cdot p$$

Allora

$$f(g^{-1}(p)) = f(M^{-1}v) = M^{-1}p + v_0$$

e

$$\varphi(p) = g(M^{-1}p + v_0) = M \cdot (M^{-1}p + v_0) = p + M \cdot v_0$$

Quindi φ manda ogni punto p nel traslato $p + M \cdot v_0$. Si tratta cioè della traslazione per il vettore

$$w_0 = M \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Siano f e g come nell'esercizio precedente. Dimostrare che invece $\psi = f \circ g \circ f^{-1}$ non è un'applicazione (lineare) ortogonale.

Soluzione esercizio 10. Osserviamo che f^{-1} è la traslazione per il vettore $-v_0$, dato che applicare f e poi f^{-1} ad un qualsiasi punto $p \in \mathbb{R}^2$ deve dare p stesso come risultato.

Allora

$$\psi(p) = f(g(f^{-1}(p))) = f(g(p - v_0)) = f(M \cdot (p - v_0)) = M \cdot (p - v_0) + v_0 = Mp - Mv_0 + v_0$$

Questa non sembra la formula di un'applicazione lineare ortogonale, in particolare l'immagine di $p = O$ non sembra il vettore nullo, e infatti

$$\psi(O) = M \cdot O - Mv_0 + v_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq O$$

e quindi ψ non può essere neppure lineare.