Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzioni del foglio di esercizi n.10

Esercizio 1. Sia $r \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine che contiene i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di r.

Soluzione esercizio 1. Troviamo un'equazione cartesiana. Un vettore direttore di r è

$$v = q - p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In un'equazione cartesiana per r, i coefficienti della x e della y formano un vettore ortogonale a v. Possiamo allora sceglierli rispettivamente uguali a 1 e -2, perché $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è ortogonale a v.

L'equazione cartesiana che cerchiamo di r assume la forma

$$x - 2y + c = 0$$

dove c è un termine noto da trovare. Imponiamo il passaggio per p:

$$1 - 2 \cdot (-1) + c = 0, \quad 3 + c = 0, \quad c = -3$$

Otteniamo l'equazione cartesiana

$$r\colon\ x - 2y - 3 = 0$$

Per le equazioni parametriche, basta usare le entrate del vettore direttore v come coefficienti del parametro $t \in \mathbb{R}$, e le entrate di un punto su r come termini noti, ad es. il punto p:

$$r\colon \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette r ed s sono parallele, dove r non dipende da k ed è data dalle equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

mentre s dipende da k ed è data dall'equazione cartesiana

$$s\colon\ -3x + ky + 1 = 0$$

Determinare l'intersezione di r ed s per tutti gli altri valori di k.

Soluzione esercizio 2. Un vettore direttore di r è dato dai coefficienti del parametro t nelle equazioni parametriche, quindi

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un vettore direttore w di s si trova prendendo i coefficienti delle variabili nell'equazione cartesiana, scambiandoli, e invertendo il segno di uno di essi. Quindi

$$w = \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le rette r ed s sono parallele se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$6 - k = 0, \quad k = 6$$

Determiniamo l'intersezione di r ed s per $k \neq 6$. Possiamo mettere tutto a sistema, e trovare t:

$$\begin{cases} x & = & 2t-3 \\ y & = & t+1 \\ -3x+ky+1 & = & 0 \end{cases}$$

Ricaviamo

$$-3 \cdot (2t-3) + k \cdot (t+1) + 1 = 0$$

$$-6t + 9 + kt + k + 1 = 0$$

$$t(-6+k) = -k - 10$$

$$t = \frac{k+10}{6-k}$$

da cui le coordinate x e y dell'intersezione sono

$$\begin{cases} x & = & 2\frac{k+10}{6-k} - 3 = \frac{5k+2}{6-k} \\ y & = & \frac{k+10}{6-k} + 1 = \frac{16}{6-k} \end{cases}$$

Esercizio 3. Trovare la proiezione ortogonale di

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sulla retta r di equazione

$$r\colon\ x - y + 2 = 0$$

Soluzione esercizio 3. Troviamo prima la retta r' ortogonale ad r e contenente p, scrivendone un'equazione cartesiana. Come coefficienti delle incognite, basta prendere quelli dell'equazione di r, scambiarli, e invertire il segno ad uno di essi:

$$r'\colon\ -x - y + c = 0$$

Il termine noto si trova imponendo il passaggio per p:

$$-3 - 3 + c = 0, \quad -6 + c = 0, \quad c = 6$$

quindi

$$r'\colon\ -x - y + 6 = 0$$

Troviamo l'intersezione fra r ed r', mettendo a sistema le equazioni:

$$\begin{cases} x - y + 2 & = & 0 \\ -x - y + 6 & = & 0 \end{cases}$$

e troviamo $x = 2, y = 4$. Quindi la proiezione di p su r è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Trovare la distanza fra il punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e la retta r, dove r è la retta che contiene

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ed è perpendicolare alla retta s di equazioni parametriche

$$s\colon\ \begin{cases} x & = & 2t \\ y & = & t+1 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 4. Troviamo la retta r. Il vettore direttore di s suggerito dalle equazioni parametriche date dall'esercizio è

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se prendiamo le entrate di w come coefficienti di un'equazione cartesiana, otteniamo una retta ortogonale a w, quindi ortogonale ad s. Quindi r si può scrivere come

$$r\colon\ 2x + y + c = 0$$

La retta r deve contenere q, quindi imponiamo che l'equazione di r sia soddisfatta nel punto q, e troveremo c:

$$2 \cdot (1) + (-3) + c = 0, \quad c = 1$$

Quindi

$$r\colon\ 2x + y + 1 = 0$$

Troviamo la distanza fra p ed r. Per trovarla, dobbiamo calcolare la proiezione ortogonale di p su r, quindi trovare la retta r' ortogonale ad r e contenente p. Una sua equazione cartesiana (o almeno i coefficienti delle incognite) sarà data scambiando i coefficienti delle variabili nell'equazione di r, e invertendo il segno di uno di essi:

$$r'\colon\ x - 2y + d = 0$$

Il termine noto si trova imponendo che la retta contenga p:

$$1 - 2 \cdot (3) + d = 0, \quad -5 + d = 0, \quad d = 5$$

quindi

$$r'\colon\ x - 2y + 5 = 0$$

Intersechiamo r ed r', mettendo a sistema le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y + 1 & = & 0 \\ x - 2y + 5 & = & 0 \end{cases}$$

Otteniamo $x = \frac{9}{5}$ e $y = -\frac{7}{5}$. La distanza fra p ed r quindi è la distanza fra p e il punto $\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$, e abbiamo

$$d\left(p, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{20}$$

Esercizio 5. Trovare le rette parallele alla retta s di equazione cartesiana

$$s\colon\ 2x + y - 1 = 0$$

e tali che la distanza della retta dal punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Soluzione esercizio 5. Sia r una delle rette richieste. Essa ha equazione cartesiana del tipo

$$r\colon\ 2x + y + c = 0$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$, visto che dev'essere parallela ad s. La retta r' ortogonale ad r e contenente p ha equazione

$$r'\colon\ x - 2y + d = 0$$

dove $d \in \mathbb{R}$ si trova nel solito modo:

$$1 - 2 + d = 0, \quad -1 + d = 0, \quad d = 1$$

quindi

$$r'\colon\ x - 2y + 1 = 0$$

L'intersezione fra r ed r' è il punto

$$q = \begin{pmatrix} -\frac{2c+1}{5} \\ \frac{2-c}{5} \end{pmatrix}$$

e la distanza fra p e q è

$$d(p,q) = \|p-q\| = \sqrt{\frac{c^2+6c+9}{5}}$$

Imponendo

$$d(p,q) = 2$$

si ottiene $c = -3+2\sqrt{5}$ oppure $c = -3-2\sqrt{5}$. Quindi le rette cercate sono due, chiamiamole r_1, r_2, e hanno equazioni

$$r_1\colon\ 2x+y-3+2\sqrt{5} = 0$$

e

$$r_2\colon\ 2x+y-3-2\sqrt{5} = 0$$

Esercizio 6. Calcolare il coseno dell'angolo φ fra la retta r di equazione cartesiana

$$r\colon\ x+2y-1=0$$

e la retta s, di equazione cartesiana

$$s\colon\ -x+y=0$$

dove l'angolo φ soddisfa $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Soluzione esercizio 6. Un vettore direttore di r è

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un vettore direttore di s è

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per definizione, l'angolo fra le due rette è fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, quindi il suo coseno è non negativo. D'altronde il coseno dell'angolo fra due vettori ha lo stesso segno del prodotto scalare dei due vettori. Quindi, dobbiamo scegliere i vettori direttori in modo che abbiamo prodotto scalare non negativo.

I vettori v e w che abbiamo trovato però soddisfano:

$$\langle v, w\rangle = -2+1 = -1$$

cioè non vanno bene come vettori direttori per il nostro caso. Basta però invertirne uno, cioè usare ad esempio $w' = -w$ come vettore direttore di s. Allora

$$\langle v, w'\rangle = 2-1 = 1$$

quindi posso usare v e w' per calcolare l'angolo fra r ed s. Otteniamo:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w'\rangle}{\|v\|\cdot\|w'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$$

Esercizio 7. Trovare tutti i punti che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che giacciono sulla retta

$$r\colon\ x-y+2=0$$

Soluzione esercizio 7. Troviamo equazioni parametriche per r. Basta risolvere il sistema, ad esempio ponendo $y=t$ e ricavando $x=t-2$. Cioè

$$r\colon\ \begin{cases} x &= t-2 \\ y &= t \end{cases}$$

Queste sono le entrate di un punto su r, al variare del parametro $t\in\mathbb{R}$. La distanza di questo punto da p è

$$d\left(\begin{pmatrix} t-2 \\ t \end{pmatrix}, p\right) = \left\|\begin{pmatrix} t-2 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2t^2-2t+1}$$

Imponendo che questa distanza sia $\sqrt{5}$ otteniamo

$$2t^2-2t+1 = 5$$

cioè $t=2$ oppure $t=-1$.

I punti cercati sono ottenuti da questi valori di t, e cioè

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Siano dati i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} k-1 \\ -2k \end{pmatrix}$$

dove il punto r dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di k per cui p, q, r sono allineati (se esistono).

Soluzione esercizio 8. I punti sono allineati se e solo se i vettori $p - q$ e $p - r$ sono proporzionali, e questo è equivalente a richiedere che

$$\begin{vmatrix} 1-2 & 1-(k-1) \\ 0-1 & 0-(-2k) \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} -1 & 2-k \\ -1 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

che è verificata per un unico valore di k, cioè $k = \frac{2}{3}$.

Esercizio 9. Usando la *disuguaglianza triangolare*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

che abbiamo già visto (conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) e che vale per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, dimostrare la disuguaglianza

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

che vale per ogni $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, e anch'essa nota come *disuguaglianza triangolare.*

Soluzione esercizio 9. Definiamo

$$u = p - r, \quad v = r - q$$

Allora

$$u + v = p - r + r - q = p - q$$

Segue

$$d(p, q) = \|u + v\|, \quad d(p, r) = \|u\|, \quad d(r, q) = \|v\|$$

e allora la disuguaglianza

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

in questo caso è proprio la disuguaglianza richiesta

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

Esercizio 10. Siano U, W sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che, **se vale** $U \cap W \neq \varnothing$, allora l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio affine, e vale

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \leq n$$

Trovare un esempio di sottospazi affini U, W tali che $U \cap W = \varnothing$.

Soluzione esercizio 10. Sia $p \in U \cap W$. Allora sappiamo che $U_0 = U - p$ è il sottospazio vettoriale soggiacente ad U, e $W_0 = W - p$ è il sottospazio vettoriale soggiacente a W.

L'insieme $(U \cap W) - p$ è l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}^n$ che si scrivono sia come $u - p$ per qualche $u \in U$, sia come $w - p$ per qualche $w \in W$. Quindi

$$(U \cap W) - p = (U - p) \cap (W - p) = U_0 \cap W_0$$

Segue che $(U \cap W) - p$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Quindi la definizione di sottospazio affine è soddisfatta: $U \cap W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, e il suo sottospazio vettoriale soggiacente è $U_0 \cap W_0$.

Dalla formula di Graßmann abbiamo

$$\dim(U_0) + \dim(W_0) - \dim(U_0 \cap W_0) = \dim(U_0 + W_0) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

e basta osservare che $\dim(U) = \dim(U_0)$, $\dim(W) = \dim(W_0)$, $\dim(U \cap W) = \dim(U_0 \cap W_0)$ per ottenere la disuguaglianza richiesta.

Come esempio di U, W sottospazi affini che non si intersecano, basta prendere due punti in $\mathbb{R}^2$ non coincidenti, o due rette parallele non coincidenti. Ad esempio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$