Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.10

5.12.2019

Esercizio 1. Sia $r \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine che contiene i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di r.

Esercizio 2. Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette r ed s sono parallele, dove r non dipende da k ed è data dalle equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

mentre s dipende da k ed è data dall'equazione cartesiana

$$s\colon \quad -3x + ky + 1 = 0$$

Determinare l'intersezione di r ed s per tutti gli altri valori di k.

Esercizio 3. Trovare la proiezione ortogonale di

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sulla retta r di equazione

$$r\colon \ x - y + 2 = 0$$

Esercizio 4. Trovare la distanza fra il punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e la retta r, dove r è la retta che contiene

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ed è perpendicolare alla retta s di equazioni parametriche

$$s\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Trovare le rette parallele alla retta s di equazione cartesiana

$$s\colon \ 2x + y - 1 = 0$$

e tali che la distanza della retta dal punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Esercizio 6. Calcolare il coseno dell'angolo φ fra la retta r di equazione cartesiana

$$r\colon \ x + 2y - 1 = 0$$

e la retta s, di equazione cartesiana

$$s\colon \quad -x + y = 0$$

dove l'angolo φ soddisfa $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 7. Trovare tutti i punti che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto
$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
e che giacciono sulla retta
$$r\colon\ x - y + 2 = 0$$

Esercizio 8. Siano dati i punti
$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} k-1 \\ -2k \end{pmatrix}$$
dove il punto r dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di k per cui p, q, r sono allineati (se esistono).

Esercizio 9. Usando la *disuguaglianza triangolare*
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$
che abbiamo già visto (conseguenza della disuguaglianza di Schwarz) e che vale per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, dimostrare la disuguaglianza
$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$
che vale per ogni $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, e anch'essa nota come *disuguaglianza triangolare.*

Esercizio 10. Siano U, W sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che, **se vale** $U \cap W \neq \varnothing$, allora l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio affine, e vale
$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \leq n$$
Trovare un esempio di sottospazi affini U, W tali che $U \cap W = \varnothing$.