Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.1

26.9.2019

Esercizio 1. Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi a scalini, nelle variabili x, y, z:

$$S_1 \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ 2y + z &= -1 \\ -2z &= 3 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + y + z &= -3 \\ -5y - 8z &= 4 \end{cases}$$

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione lineare

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -5.$$

Trovare i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'elemento $(3 + \lambda, 2\lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ sia una soluzione dell'equazione.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti matrici è a scalini, e in caso affermativo evidenziarne i pivot.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Trovare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui la matrice seguente è a scalini

$$A_t = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ t-1 & 2 & 4t \\ 0 & -t+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono compatibili, e in caso affermativo trovarne le soluzioni:

$$S_1 \begin{cases} 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - 3x_2 &= 0 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 3x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ 5x_1 + x_2 &= 7 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 6. Trovare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare

$$S \begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 &= 0 \\ (1-\alpha)x_1 - x_2 &= 1 \end{cases}$$

è compatibile.

Esercizio 7. Dire quando i prodotti AB, BA, CD e DC sono definiti, e in caso affermativo calcolarli, per le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Sia data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutte le matrici 2×2 che *commutano* con C, cioè tutte le matrici D tali che $CD = DC$.

Esercizio 9. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

cioè B ha le entrate tutte uguali a zero, tranne quelle sulla diagonale principale, che sono uguali a λ. Si dimostri che

$$AB = BA$$

Esercizio 10. Siano A e B due matrici $n \times n$. Ricordiamo che la traccia di una matrice (denotata $\mathrm{tr}(A)$) è la somma degli elementi sulla diagonale principale. Si dimostri che

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$