Corso di Geometria

Tutoraggio del 14.2.2019

Federico Fusco

federico.fusco@uniroma1.it

Esercizio 1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che ha come autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ e relativi autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice canonica di T.
(2) Trovare dimensioni e delle basi per nucleo e immagine di T.
(3) T è diagonalizzabile? Se sì scomporre la matrice rispetto alla base ortonormale di autovettori.
(4) **Bonus:** Calcolare la matrice canonica corrispondente a T^{1000}.

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti due rette:

$$r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(1) Quale è la posizione reciproca di r ed s?
(2) Trovare, se esiste ed è unico, il piano π contenente r ed s.
(3) Trovare le distanze di r, s e π dall'origine.

Hint: Per calcolare le distanze da r ed s si può usare un approccio geometrico o uno più analitico. Per quanto riguarda la distanza dal punto al piano è suggerito un approccio geometrico.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{V}$ delle matrici reali 2×2 con la seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Siano $T_1, T_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definite come segue:

$$T_1(A) = AA^T, \qquad T_2(A) = \frac{A + A^T}{2}.$$

Per $i = 1, 2$ rispondere alle seguenti domande:

(1) $T_i(A)$ è simmetrica per ogni matrice $A \in \mathbb{V}$?
(2) T_i è un'applicazione lineare?
(3) Scrivere, se la risposta a (2) è affermativa, la matrice che rappresenta T_i rispetto alla base B.
(4) Trovare, se la risposta a (2) è affermativa, nucleo ed immagine di T_i.
(5) Trovare, se la risposta a (2) è affermativa, autovalori ed autovettori di T_i.

Esercizio 4. Classificare e trovare la forma canonica delle sequenti coniche:

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$;
(2) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0$.