Geometria BAER
Test di autovalutazione del 5.12.2018

LEGGERE ATTENTAMENTE PRIMA DI ANDARE ALL'INIZIO DEL TEST ALLA PAGINA SUCCESSIVA.

Il test NON È VALUTATO ai fini dell'esame. Va svolto in due ore consecutive senza consultarsi con altri e senza usare libri o appunti. Con le soluzioni verrà pubblicato una schema per valutare il vostro risultato. Essenzialmente per ogni parte di domanda alla quale si risposto correttamente usando un metodo valido si ottengono i punti indicati, il primo errore di calcolo (di tutto il compito) non viene penalizzato, il secondo toglie 0.5 al punteggio ottenuto e dal terzo in poi si toglie 1 punto. Chi ottiene un punteggio inferiore a 12 dovrebbe richiedere di partecipare a un gruppo di tutoraggio tra pari, lo può fare senza coinvolgere me contattando Federico Fusco fusco.federico94@gmail.com e prendendo accordi. Naturalmente può chiedere anche di discutere del test a me o al dottor Pagani.

Esercizio 1.

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

e sia W il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $U \cap W$ (3 punti), e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$ (2 punti).

Esercizio 2.

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

definiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ponendo $f(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2$

(a) Si mostri che f è un operatore simmetrico (3 punti)

(b) Si trovi una base ortonormale di autovettori di f (2 punti)

Esercizio 3.

Sia $\mathcal{A}$ lo spazio delle matrici tre per tre antisimmetriche. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3[x]$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = (a - 2b - 4c) + (a + b - c)x + (2c - a)x^2.$$

Consideriamo le basi

$$\mathcal{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

(a) Si trovi la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (2 punti)

(b) Si trovi il nucleo di f (1 punto) e si dica se il polinomio $x - 1$ appartiene all'immagine di f. (2 punti)

Esercizio 4.

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si consideri il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t \\ 1 - 3t \\ t \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Determinare, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ su U (3 punti). Determinare se esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\underline{v} \in U$, e valori per cui $\underline{v} \in U^\perp$ (2 punti).