Geometria BAER
Test di autovalutazione del 5.12.2018

LEGGERE ATTENTAMENTE PRIMA DI ANDARE ALL'INIZIO DEL TEST ALLA PAGINA SUCCESSIVA.

Il test NON È VALUTATO ai fini dell'esame. Va svolto in due ore consecutive senza consultarsi con altri e senza usare libri o appunti. Con le soluzioni verrà pubblicato una schema per valutare il vostro risultato. Essenzialmente per ogni parte di domanda alla quale si risposto correttamente usando un metodo valido si ottengono i punti indicati, il primo errore di calcolo (di tutto il compito) non viene penalizzato, il secondo toglie 0.5 al punteggio ottenuto e dal terzo in poi si toglie 1 punto. Chi ottiene un punteggio inferiore a 12 dovrebbe richiedere di partecipare a un gruppo di tutoraggio tra pari, lo può fare senza coinvolgere me contattando Federico Fusco fusco.federico94@gmail.com e prendendo accordi. Naturalmente può chiedere anche di discutere del test a me o al dottor Pagani.

Esercizio 1.

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

e sia W il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $U \cap W$ (3 punti), e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$ (2 punti).

Soluzione: La dimensione di U è 2, perché la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2. La dimensione di W è 3, perché il minore formato dalle ultime tre righe dei vettori ha determinante non nullo, quindi l'intersezione per la formula di Grassmann ha dimensione almeno 1. Si può trovare l'intersezione con il solito metodo, trovando una base di U e imponendo che un vettore generico di U sia uguale ad un vettore generico di W, oppure sostituendo il vettore generico di W nelle equazioni cartesiane di U ottenendo un sistema di due equazioni in tre incognite. Risulta che l'intersezione ha dimensione 1, ed è generata da

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Per completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$ basta aggiungere i vettori della base canonica uno ad uno, se quello che stiamo aggiungendo non è combinazione lineare dei precedenti. Otteniamo la base $(\underline{v}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Alternativamente, si può aggiungere i vettori di una base di $L[v]^\perp$ che ha equazione $8x_1 + 10x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0$

Esercizio 2.

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

definiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ponendo $f(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2$

(a) Si mostri che f è un operatore simmetrico (3 punti)

Soluzione: Usando la definizione di f calcoliamo

$$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice canonica di f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

che è simmetrica, dunque f è un operatore simmetrico. Alternativamente, usando la bilinearità,

$$\begin{aligned} \langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle &= \langle \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \langle \underline{u}_1, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle \langle \underline{u}_2, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{w} \rangle \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle + \langle \underline{u}_2, \underline{w} \rangle \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle = \\ &= \langle \underline{v}, \langle \underline{u}_1, \underline{w} \rangle \underline{u}_1 \rangle + \langle \underline{v}, \langle \underline{u}_2, \underline{w} \rangle \underline{u}_2 \rangle = \langle \underline{v}, \langle \underline{w}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 \rangle + \langle \underline{v}, \langle \underline{w}, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 \rangle \langle \underline{v}, \langle \underline{w}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \langle \underline{w}, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 \rangle = \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle \end{aligned}$$

quindi f è simmetrico. Un altro modo di procedere potrebbe essere cercare la matrice di f rispetto ad una base ortonormale composta da vaettori di una base ortonormale di $L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$ ottenuta con Gram-Scmhidt e un vettore di norma 1 che generi $L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]^\perp = \operatorname{Ker} f$

(b) Si trovi una base ortonormale di autovettori di f (2 punti)

Soluzione: Osserviamo che $\operatorname{Ker} f = L[(1,2,-1)^t] = E(0)$, *calcoliamo il polinomio caratteristico*

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & 5-x \end{pmatrix} = (1-x)(x^2 - 6x + 1 - 1) = x(x-1)(x-6).$$

Trovando le soluzioni dei sistemi $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$ *e* $(A - 6I)\underline{x} = \underline{0}$ *troviamo una base ortogonale di autovettori*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che divisi per le loro norme (rispettivamente $\sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{30}$*) danno la base ortonormale cercata.*

Esercizio 3.

Sia $\mathcal{A}$ lo spazio delle matrici tre per tre antisimmetriche. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3[x]$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = (a - 2b - 4c) + (a + b - c)x + (2c - a)x^2.$$

Consideriamo le basi

$$\mathcal{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

(a) Si trovi la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (2 punti)

Soluzione: Calcolando abbiamo

$$f(A_1) = 1 + x - x^2, \quad f(A_2) = -2 + x, \quad f(A_3) = -4 - x + 2x^2$$

dunque la matrice cercata è

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Si trovi il nucleo di f (1 punto) e si dica se il polinomio $x - 1$ appartiene all'immagine di f. (2 punti)

Soluzione: Il nucleo sono le matrici le cui coordinate sono le soluzioni di $F\underline{x} = \underline{0}$, *dunque appartengono al sottospazio* $L[(2,-1,1)^t]$. *quindi sono tutti i multipli della matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(togliere 0.5 dal punteggio se la risposta data non è una matrice)

L'immagine di f *è generata dai polinomi* $1 + x - x^2$, $x - 2$ *corrispondenti alle prime due colonne della matrice* F. *Usando il fatto che le coordinate sono un isomorfismo e il criterio del rango , il polinomio* $x - 1$ *è nell'immagine se e solo se la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango due, ma il determinante di questa matrice è non nullo.

L'esercizo può anche essere svolto utilizzando il fatto che due polinomi sono uguali se e solo se i coefficienti dei termini di grado corrispondente sono uguali, quindi per trovare (le coordinate degli elementi di) $\operatorname{Ker} f$ *basta risolvere il sistema* $a-2b-4c = a+b-c = 2c-a = 0$*, mentre per il secondo punto bisogna vedere se il sistema*

$$\begin{cases} a-2b-4c = -1 \\ a+b-c = 1 \\ 2c-a = 0 \end{cases}$$

è compatibile.

Esercizio 4.

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si consideri il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 2t \\ 1-3t \\ t \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Determinare, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ su U (3 punti). Determinare se esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\underline{v} \in U$, e valori per cui $\underline{v} \in U^{\perp}$ (2 punti).

Soluzione: I vettori $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ *sono linearmente indipendenti, per cui sono una base di* U*. Ortogonalizziamoli con Gram-Schmidt, ottenendo*

$$\underline{w}_1 = \underline{u}_1, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con la formula della proiezione

$$P_U(\underline{v}) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1 + \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle}{\langle \underline{w}_2, \underline{w}_2 \rangle} \underline{w}_2 + \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_3 \rangle}{\langle \underline{w}_3, \underline{w}_3 \rangle} \underline{w}_3$$

otteniamo la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ *su* U

$$P_U(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ \frac{5t}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{5t}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo scrivere $\underline{v}$ *come somma:*

$$v = \underbrace{P_U(\underline{v})}_{\in U} + \underbrace{\underline{v} - P_U(\underline{v})}_{\in U^{\perp}}$$

Abbiamo $\underline{v} \in U$ *se e solo se* $\underline{v} - P_U(\underline{v}) = O$*. Siccome*

$$\underline{v} - P_U(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo vettore è nullo se e solo se $t = 1$*. Quindi esistono valori di* t *per cui* $\underline{v} \in U$*, e si tratta del valore* $t = 1$*.*

Invece $\underline{v} \in U^{\perp}$ *se e solo se* $P_U(\underline{v}) = O$*. Ma* $P_U(\underline{v})$ *non è mai nullo: per avere la quarta entrata uguale a* 0 *dovremmo avere* $t = 0$*, ma per questo valore di* t *la prima entrata non è nulla. Quindi non esistono valori di* t *per cui* $v \in U^{\perp}$*.*