

## Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.8

22.11.2018

**Esercizio 1.** Dimostrare che, se  $M$  è una matrice ortogonale, allora  $\det(M)$  è 1 oppure  $-1$ .

**Esercizio 2.** (1) Siano  $a, c \in \mathbb{R}$  due numeri tali che  $a^2 + c^2 = 1$ . Dimostrare che

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

è ortogonale e ha determinante uguale a 1.

(2) Viceversa, sia  $A$  matrice  $2 \times 2$  qualsiasi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che  $A$  sia ortogonale, con  $\det(A) = 1$ . Dimostrare che allora  $b = -c$  e  $d = a$ , e che  $a^2 + c^2 = 1$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo due vettori

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $M$  una matrice ortogonale  $n \times n$ . Usare la formula del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = u^t \cdot v$$

per dimostrare che

$$\langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle,$$

cioè moltiplicare per  $M$  due vettori colonna non cambia il loro prodotto scalare. (Suggerimento: può essere utile il fatto che la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte, ma con l'ordine invertito:  $(AB)^t = B^t A^t$ .)

**Esercizio 4.** (1) Siano  $U, W$  sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ , e supponiamo che  $U \subseteq W$ . Dimostrare che allora  $U^\perp \supseteq W^\perp$ .

(2) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ . Dimostrare che

$$(U^\perp)^\perp = U$$

(3) Siano  $U, W$  sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ . Dimostrare che, se

$$U^\perp = W^\perp,$$

allora  $U = W$ .

**Esercizio 5.** Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 6.** Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di  $U$  e una base ortonormale di  $U^\perp$ .

**Esercizio 7.** Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Scrivere  $v$  come somma di un vettore di  $U$  e un vettore di  $U^\perp$ .

**Esercizio 8.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $D$  (entrambe  $2 \times 2$ ) tali che

$$D = M^{-1}AM$$

**Esercizio 9.** Dire, motivando la risposta, se

- (1) esiste un endomorfismo simmetrico  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori;

- (2) esiste un endomorfismo simmetrico  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 10.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfismo simmetrico che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortogonale di  $\mathbb{R}^4$  formata da autovettori di  $f$ .