Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.7

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ x + y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice canonica di f, e la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 1. La matrice canonica è la matrice che ha per colonne le immagini dei vettori della base canonica. Quindi le colonne sono

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

La matrice canonica allora è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice M di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}'$. Dobbiamo scrivere i vettori di $\mathcal{B}'$ in termini di quelli di $\mathcal{E}$, ma questo sappiamo che è semplicemente prendere i vettori di $\mathcal{B}'$. Li mettiamo in colonna:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice di f nella base $\mathcal{B}'$ è la matrice

$$A' = M^{-1}AM$$

L'inversa di M è

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

per cui abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Consideriamo gli endomorfismi f_1, f_2 di $\mathbb{R}^2$ le cui matrici canoniche sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Per $i = 1$ e $i = 2$:

(1) calcolare gli autovalori di f_i,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f_i è diagonalizzabile,
(4) se f_i è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M_i e una matrice diagonale D_i tali che

$$A_i = M_i^{-1} \cdot D_i \cdot M_i$$

Soluzione esercizio 2. (1) Consideriamo f_1. Il polinomio caratteristico di A_1 è

$$p_{A_1}(x) = \det(A_1 - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & -4 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4$$

Il polinomio ha solo uno zero, e cioè $x = 2$, infatti

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Abbiamo quindi un solo autovalore, e cioè $\lambda = 2$. Troviamo l'autospazio $E(2)$. Oltre al vettore nullo, contiene gli autovettori v tali che $f_1(v) = 2v$. Ponendo

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

stiamo chiedendo che

$$A_1 \cdot v = 2v$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 4y &= 2x \\ x &= 2y \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x - 4y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dipendono da un parametro, ad esempio la y. Diamo un valore, ponendo $y = 1$, e troviamo $x = 2$. Allora una base dell'autospazio $E(2)$ è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non abbiamo altri autospazi, per cui la somma totale delle dimensioni di tutti gli autospazi è 1. La dimensione di $\mathbb{R}^2$ è 2, per cui f_1 <u>non è</u> diagonalizzabile.

(2) Consideriamo f_2. Il polinomio caratteristico di A_2 è

$$p_{A_2}(x) = \det(A_2 - xI) = \begin{vmatrix} -8-x & -5 \\ 10 & 7-x \end{vmatrix} = x^2 + x - 6$$

Le radici sono $x = 2$ e $x = -3$, quindi abbiamo due autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$.

Con lo stesso procedimento di prima, troviamo due basi per i due autospazi $E(2)$ ed $E(-3)$, ciascuna formata da un solo vettore. Per $E(2)$ troviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e per $E(-3)$ troviamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$, quindi f_2 è diagonalizzabile. In questa base, la matrice di f_2 è la matrice diagonale degli autovalori, cioè

$$A_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice di passaggio N_2 dalla base canonica alla base $\mathcal{B}'$: è quella che ha i vettori di $\mathcal{B}'$ come colonne, quindi

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria sappiamo che

$$A_2' = N_2^{-1} A_2 N_2$$

Deduciamo che

$$N_2 A_2' N_2^{-1} = A_2$$

quindi abbiamo anche trovato la matrice diagonale cercata $D_2 = A_2'$ e la matrice $M_2 = N_2^{-1}$ richiesta dall'ultima domanda dell'esercizio. Esplicitamente:

$$M_2 = N_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare gli autovalori di f,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f è diagonalizzabile,
(4) se f è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che

$$A = M^{-1} \cdot D \cdot M.$$

Soluzione esercizio 3. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x + 4$$

Per trovare le radici, vale la pena provare innanzitutto con i fattori (positivi e negativi) del termine noto. Troviamo due radici, $x = -1$ e $x = 4$. Allora $x+1$ e $x-4$ dividono $p_A(x)$, cioè esiste $q(x)$ tale che

$$p_A(x) = (x+1)(x-4)q(x)$$

È facile trovare $q(x)$ perché deve avere grado 1, cioè $q(x) = ax+b$. Sostituendo, si trovano $a = b = -1$, cioè

$$p_A(x) = -(x+1)^2(x-4)$$

Quindi abbiamo due autovalori: $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 4$, con molteplicità algebrica 1. La somma delle molteplicità algebriche è 3, per cui *è possibile* che f sia diagonalizzabile.

Per accertarlo, come nell'esercizio precedente, si trovano i due autospazi risolvendo due sistemi lineari. Troviamo una base delle soluzioni del primo sistema, cioè una base di $E(-1)$. Ad esempio possiamo trovare i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $E(4)$ possiamo trovare

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La somma delle dimensioni di tutti gli autospazi è $2 + 1 = 3$, per cui f è diagonalizzabile. Come nell'esercizio precedente, la matrice diagonale cercata D è quella degli autovalori:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Come per l'esercizio precedente, la matrice M è l'inversa di quella che ha per colonne i rispettivi autovettori trovati:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Dimostrare che una matrice A del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(dove $a, b, d \in \mathbb{R}$) è diagonalizzabile se e solo se $a \neq d$ oppure $b = 0$.

Soluzione esercizio 4. Dimostriamo che se $a \neq d$ oppure $b = 0$ allora A è diagonalizzabile. Se $b = 0$ allora A è diagonale, quindi abbiamo finito; rimane da esaminare il caso in cui $a \neq d$. Troviamo gli autovalori di A calcolando le radici del polinomio caratteristico. Abbiamo:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ 0 & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x)$$

quindi le radici sono $x = a$ e $x = d$. Sono due autovalori diversi di un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$: quindi A è diagonalizzabile.

Viceversa, supponiamo che A sia diagonalizzabile, e dimostriamo che $a \neq d$ oppure $b = 0$. Possiamo procedere "per assurdo", cioè supponiamo che quello che vogliamo dimostrare sia falso, e dimostriamo che allora A non poteva essere diagonalizzabile.

Cosa vuol dire assumere che "$a \neq d$ oppure $b = 0$" sia falso? Vuol dire assumere che $a = d$ <u>e anche che</u> $b \neq 0$.

Il calcolo degli autovalori di A è comunque quello di prima, e produce un solo autovalore $\lambda = a$ (perché stiamo supponendo $a = d$). Calcoliamo la dimensione di $E(a)$:

$$\dim(E(a)) = 2 - \text{rg}(A - aI) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Visto che $b \neq 0$, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è 1, per cui

$$\dim(E(a)) = 1.$$

Abbiamo cioè un solo autovalore, di molteplicità geometrica 1: non arriviamo a 2 che è la dimensione di $\mathbb{R}^2$, quindi A non poteva essere diagonalizzabile. Ma A era diagonalizzabile: abbiamo ottenuto un assurdo.

Per cui ci deve essere un problema con la nostra ipotesi "$a = d$ e anche $b \neq 0$". In altre parole, deduciamo che $a \neq d$, oppure $b = 0$.

Esercizio 5. Data una matrice quadrata A e un polinomio

$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

definiamo $q(A)$ come la matrice seguente:

$$q(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$$

(le potenze di A sono calcolate col solito prodotto fra matrici). Sia A una matrice 2×2, e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Verificare che $p_A(A)$ è la matrice nulla.

Soluzione esercizio 5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Allora

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

Segue

$$p_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I$$

Abbiamo

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)I &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo diagonalizzabile, con n autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tutti diversi fra loro. Sia W la somma di tutti gli autospazi $E(\lambda_i)$ tali che l'autovalore corrispondente λ_i sia $\neq 0$. Dimostrare che $W = \mathrm{Im}(f)$.

Soluzione esercizio 6. Gli autospazi di f sono $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_n)$. Dato che non ci sono ripetizioni negli autovalori λ_i, non ci sono ripetizioni neppure negli spazi $E(\lambda_i)$.

Quindi la somma delle dimensioni di tutti gli autospazi è la somma

$$\dim(E(\lambda_1)) + \ldots + \dim(E(\lambda_n))$$

Sappiamo che questa somma è uguale a n, perché f è diagonalizzabile, e sappiamo che tutti gli autospazi hanno dimensione almeno 1. Ne consegue che tutti gli autospazi di questa f hanno dimensione 1.

Quindi possiamo scegliere, per ogni autospazio, una base fatta da un solo vettore. Otteniamo n vettori: $v_1, \ldots, v_n$, di autovalori rispettivamente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Sappiamo dalla teoria che $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, cioè quello che otteniamo mettendo insieme tutte le basi di tutti gli autospazi, è una base di $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, possiamo supporre che se c'è un autovalore nullo, allora lo scriviamo per ultimo. Infatti, se non è così, possiamo riordinarli in modo da mettere lo 0 per ultimo. Abbiamo dunque che W è generato da $v_1, \ldots, v_{n-1}$, nel caso in cui abbiamo un autovalore nullo (allora è l'ultimo). Invece W è generato da $v_1, \ldots, v_n$ se nessun autovalore è nullo.

Per comodità, scriviamo $m = n-1$ nel primo caso, e $m = n$ nel secondo. Quindi W è generato sempre da $v_1, \ldots, v_m$. Abbiamo anche che, se $m = n$, allora W è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Dimostriamo che $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$. Se $m = n$ allora l'inclusione $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ è ovvia, perché $W = \mathbb{R}^n$. Supponiamo allora $m = n-1$.

Sia $u \in \mathrm{Im}(f)$, quindi esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v) = u$. Scriviamo v come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

Facciamo l'immagine:

$$u = f(v) = c_1 f(v_1) + \ldots + c_n f(v_n) = c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}v_{n-1} + c_n\lambda_n v_n = \ldots$$

Visto che abbiamo supposto $m = n-1$, cioè $\lambda_n = 0$, abbiamo

$$\ldots = c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}v_{n-1}.$$

Questo vettore è in W, che è quello che volevamo dimostare.

Dimostriamo ora che $\mathrm{Im}(f) \supseteq W$. Sia $w \in W$, cioè w è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$. Quindi esistono coefficienti $a_1, \ldots, a_m$ tali che

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

Dobbiamo dimostrare che $w \in \mathrm{Im}(f)$, cioè che esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v) = w$. Per trovarlo, sfruttiamo il fatto che $f(v_i) = \lambda_i v_i$, e che $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sono tutti diversi da 0. Per ottenere w basta allora prendere

$$v = \frac{a_1}{\lambda_1}v_1 + \ldots + \frac{a_m}{\lambda_m}v_m$$

Infatti

$$f(v) = \frac{a_1}{\lambda_1}f(v_1) + \ldots + \frac{a_m}{\lambda_1}f(v_m) = \frac{a_1\lambda_1}{\lambda_1}v_1 + \ldots + \frac{a_m\lambda_m}{\lambda_m}v_m = w$$

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Soluzione esercizio 7. L'insieme $E(0)$ è l'insieme degli autovettori di autovalore 0 (cioè dei $v \neq O$ tali che $f(v) = 0 \cdot v$) con in più il vettore nullo O. Osserviamo che vale anche $f(O) = 0 \cdot O$. Quindi per ogni $v \in E(0)$ vale $f(v) = 0 \cdot v$.

Viceversa, se un vettore qualsiasi $w \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $f(w) = 0 \cdot w$, allora w è un autovettore di autovalore 0, oppure $w = O$.

In altre parole, possiamo dire che $E(0)$ è l'insieme di tutti i vettori w tali che $f(w) = 0 \cdot w (= O)$. Ma questo insieme è il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$, quindi

$$\dim(E(0)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

D'altronde sappiamo che

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

da cui deduciamo l'uguaglianza richiesta

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Esercizio 8. Trovare, scrivendone la matrice canonica, un endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano una base dell'autospazio $E(-3)$.

Soluzione esercizio 8. Osserviamo che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi in particolare $E(-3)$ deve avere dimensione 2.

Possiamo intanto scrivere la matrice di f rispetto a una base di nostra scelta. Dato che sappiamo cosa deve fare f con v_1 e v_2, completiamoli ad una base di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio aggiungendo e_1, il primo vettore della base canonica. Si verifica facilmente che v_1, v_2, e_1 sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_1)$ è una base.

Scegliamo la matrice di f in questa base, in modo che f sia come richiesta dall'esercizio. Sappiamo che deve valere $f(v_1) = -3v_1$, e che $f(v_2) = -3v_2$. Siamo invece liberi di scegliere $f(e_1)$, però e_1 non dev'essere un autovalore di autovettore -3, altrimenti l'autospazio $E(-3)$ avrebbe dimensione 3, e non 2.

La cosa più semplice è mettere $f(e_3) = O$. Allora la matrice di f nella base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice canonica di f, cioè la matrice di f nella base canonica, dobbiamo trovare la matrice M del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Cioè dobbiamo scrivere i vettori della base canonica in termini di quelli di $\mathcal{B}$. Si trova facilmente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot e_1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 2 \cdot e_1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 3 \cdot e_1,$$

I coefficienti, messi in colonna, formano la matrice di passaggio M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice canonica di f è

$$A' = M^{-1} A M$$

L'inversa di M è

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Rimane un'ultima verifica da fare. Abbiamo costruito f in modo che abbia almeno due autovettori, v_1 e v_2, linearmente indipendenti di autovalore $\lambda = -3$, e abbiamo scelto l'immagine del terzo vettore e_1 un po' a caso, facendo solo attenzione che e_1 non sia anch'esso un autovettore di autovalore -3.

Dobbiamo però essere sicuri che l'autospazio $E(-3)$ non sia più grande del dovuto. Per questo, basta calcolare il rango della matrice

$$A' - (-3) \cdot I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1, quindi la dimensione di $E(-3)$ è uguale a $n - 1 = 3 - 1 = 2$. Allora siamo sicuri di aver trovato una f come richiesto dall'esercizio.

Esercizio 9. Dimostrare che non esiste alcun endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 2, e i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 3.

Soluzione esercizio 9. Sappiamo che, se esistesse f con le proprietà richieste, avremmo $E(2) \cap E(3) = \{O\}$. Calcoliamo allora l'intersezione fra il sottospazio $U = L[v_1, v_2]$ generato da v_1, v_2, e il sottospazio $W = L[v_3, v_4]$ generato da v_3, v_4. La dimensione dell'intersezione è uguale a

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

Sappiamo che $U + W$ è generato da v_1, v_2, v_3, v_4, quindi la sua dimensione è il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango, possiamo prima fare qualche operazione elementare di riga. Ad esempio $R_3 \to R_3 + R_2$ produce

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice si trova facilmente sviluppando per la terza riga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-6) + 8 - 0 - 0 - 2 = 0$$

Quindi il rango della matrice $\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ è inferiore a 4. D'altronde si vede facilmente che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(U) = 2$, e anche che v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 2$. Abbiamo dunque

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 2 + 2 - \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4)) > 4 - 4 = 0$$

cioè $U \cap W$ non può essere uguale a $\{O\}$. Quindi non può esistere f tale che $E(2) = U$ ed $E(3) = W$.

Esercizio 10. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

abbia $\lambda = 1$ come autovalore.

Soluzione esercizio 10. Per avere autovalore $\lambda = 1$, il polinomio caratteristico della matrice A deve annullarsi in $x = 1$. Calcoliamo allora il polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1 - x & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & -x & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha - x \end{vmatrix} = -x^3 - \alpha x^2 + x^2 + \alpha x - 2x + 12\alpha$$

Il valore in $x = 1$ è

$$p_A(1) = -1 - \alpha + 1 + \alpha - 2 + 12\alpha = 12\alpha - 2$$

Questo è uguale a 0 se e solo se $\alpha = \frac{1}{6}$.