Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.7

15.11.2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ x + y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice canonica di f, e la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Consideriamo gli endomorfismi f_1, f_2 di $\mathbb{R}^2$ le cui matrici canoniche sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Per $i = 1$ e $i = 2$:

(1) calcolare gli autovalori di f_i,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f_i è diagonalizzabile,
(4) se f_i è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M_i e una matrice diagonale D_i tali che

$$A_i = M_i^{-1} \cdot D_i \cdot M_i$$

Esercizio 3. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare gli autovalori di f,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $E(\lambda)$,
(3) dire se f è diagonalizzabile,
(4) se f è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che

$$A = M^{-1} \cdot D \cdot M.$$

Esercizio 4. Dimostrare che una matrice A del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(dove $a, b, d \in \mathbb{R}$) è diagonalizzabile se e solo se $a \neq d$ oppure $b = 0$.

Esercizio 5. Data una matrice quadrata A e un polinomio

$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

definiamo $q(A)$ come la matrice seguente:

$$q(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$$

(le potenze di A sono calcolate col solito prodotto fra matrici). Sia A una matrice 2×2, e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Verificare che $p_A(A)$ è la matrice nulla.

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo diagonalizzabile, con n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti diversi fra loro. Sia W la somma di tutti gli autospazi $E(\lambda_i)$ tali che l'autovalore corrispondente λ_i sia $\neq 0$. Dimostrare che $W = \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\dim(E(0)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

Esercizio 8. Trovare, scrivendone la matrice canonica, un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano una base dell'autospazio $E(-3)$.

Esercizio 9. Dimostrare che non esiste alcun endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 2, e i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 3.

Esercizio 10. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

abbia $\lambda = 1$ come autovalore.