Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.6

Esercizio 1. (1) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Sia M la matrice che permette di passare, per qualsiasi vettore, dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$, cioè

$$M = \mathrm{Mat}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1), \ldots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_n))$$

dove $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Scrivere in modo semplice, usando M, la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

(2) Sia N la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ alle coordinate rispetto a una terza base $\mathcal{B}''$ di V. Come si può scrivere, in termini di M ed N, la matrice che permette di passare direttamente dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ a quelle rispetto a $\mathcal{B}''$?

Soluzione esercizio 1. (1) La matrice M permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ nel senso che, per ogni vettore $v \in V$, vale

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

Per passare invece da $\mathcal{B}'$ a B, bisogna scrivere una matrice $\widetilde{M}$ tale che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \widetilde{M} \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

Osserviamo che possiamo moltiplicare a sinistra per M^{-1} entrambi i membri di

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

ottenendo

$$M^{-1} \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = M^{-1} \cdot M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

per cui deduciamo che M^{-1} permette di passare dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

(2) Usiamo un metodo simile per trovare la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}''$. Sappiamo che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$

e che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(v) = N \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v).$$

Basterà allora sostituire nella seconda uguaglianza il vettore delle coordinate $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$ come espresso nella prima uguaglianza. Otteniamo

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(v) = N \cdot (M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)) = (NM) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)).$$

Per cui la matrice richiesta dall'esercizio è il prodotto NM.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sia $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ la base formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sia $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$.

Soluzione esercizio 2. Possiamo procedere in tre modi.

(1) Possiamo calcolare la matrice M che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$, cioè tale che
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(w) = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(w)$$
per *qualsiasi* $w \in \mathbb{R}^3$. Questo richiede di trovare le coordinate di v_1, v_2, v_3 rispetto a w_1, w_2, w_3, cioè di risolvere tre sistemi lineari in 3 incognite. Il primo è dato da
$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = v_1$$
La soluzione è unica, e messa in colonna forma il vettore delle coordinate
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Gli altri due sistem hanno rispettivamente v_2 e v_3 invece di v_1, hanno una soluzione ciascuno, che messe in colonna formano i due vettori delle coordinate
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_3) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$
Usiamo allora la formula
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \mathrm{Mat}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1), \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_2), \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_3)) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$$
ottenendo
$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) Come secondo metodo, possiamo usare il primo esercizio. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Possiamo passare da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ nel modo seguente: prima passiamo da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$, e poi passiamo da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}'$.

La matrice che passa dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{E}$ è
$$M = \mathrm{Mat}(\mathcal{F}_{\mathcal{E}}(v_1), \mathcal{F}_{\mathcal{E}}(v_2), \mathcal{F}_{\mathcal{E}}(v_3))$$
ma osserviamo che queste colonne di coordinate sono semplicemente i vettori v_1, v_2, v_3. Quindi
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Chiamiamo N la matrice che passa dalle coordinate rispetto a $\mathcal{E}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$. Grazie alla parte 1 dell'esercizio 1, la matrice N è l'inversa di quella che permette di passare da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{E}$. Quest'ultima matrice ha semplicemente per colonne i vettori w_1, w_2, w_3. Cioè
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
Allora, grazie alla parte 2 dell'esercizio 1, sappiamo che la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ a quelle rispetto a $\mathcal{B}'$ è
$$N \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Concludiamo allora come prima:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) Terzo metodo. Si può anche direttamente risolvere il sistema

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = v_1 - 2v_2 - v_3$$

Infatti, qui abbiamo messo davanti a v_1, v_2, v_3 i coefficienti dati dalle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi il secondo membro di quest'equazione è uguale a v.

Ora, dobbiamo trovare le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$, cioè stiamo trovando numeri x_1, x_2, x_3 tali che messi come coefficienti a w_1, w_2, w_3 producono lo stesso vettore. Si tratta allora proprio dell'equazione che abbiamo scritto.

La soluzione è unica, ed è

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per cui

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una base di $\mathbb{R}^2$, tale che le coordinate dei vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovare $\mathcal{B}$.

Soluzione esercizio 3. Trovare una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ vuol dire trovare le entrate di due vettori di $\mathbb{R}^2$: mettiamoli come incognite:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}.$$

Le richieste dell'esercizio consistono nel richiedere che valgano:

$$-4v_1 + v_2 = u_1, \quad -v_1 + v_2 = u_2$$

cioè

$$\begin{cases} -4x + y = 2 \\ -4z + w = 1 \\ -x + y = -3 \\ -z + w = -1 \end{cases}$$

Risolvendo, troviamo

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{14}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \\ w = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

quindi la base cercata è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(2) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ c \cdot d \end{pmatrix}$$

(3) $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che, data una matrice A, il valore di $f(A)$ è uguale alla somma di tutte le entrate di A. (Ricordiamo che $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici 2×2 con entrate numeri reali.)

(4) $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi in x) data da $f(p(x)) = p(2)$, cioè f associa ad un polinomio qualsiasi $p(x)$ il valore del polinomio in $x = 1$.

Soluzione esercizio 4. (1) Si vede facilmente che

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{8}{5} \neq 2 \cdot f(1)$$

Quindi non è vero che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (inteso come scalare) e per ogni $v \in \mathbb{R}$ (inteso come vettore) si ha $f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v)$, e quindi f non è lineare.

(2) Prendiamo la somma di due vettori qualsiasi e facciamo f:

$$f\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \\ d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a') \cdot (b+b') \\ (c+c') \cdot (d+d') \end{pmatrix}$$

Questo <u>non è</u> sempre uguale alla somma

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + a'b' \\ cd + c'd' \end{pmatrix}$$

infatti ad esempio prendendo $a = a' = c = c' = 1$ e $b = b' = d = d' = 2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} (1+1) \cdot (2+2) \\ (1+1) \cdot (2+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

quindi anche questa f non è lineare.

(3) Questa f è lineare. Infatti

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$$

e abbiamo

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} =$$

$$= a + a' + b + b' + c + c' + d + d' = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$f\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f \cdot \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d = \alpha(a + b + c + d) = \alpha \cdot f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(4) Anche questa f è lineare. Infatti il valore in $x = 2$ di una somma di due polinomi $p(x) + q(x)$ è proprio uguale a $p(2) + q(2)$, e il valore in $x = 2$ di un polinomio riscalato per uno scalare $\alpha \cdot p(x)$ è uguale a $\alpha \cdot p(2)$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data dalla formula

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -2y \\ 3x-y \\ x \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice (canonica) di f.

Soluzione esercizio 5. Basta trovare le immagini dei vettori della base canonica. Mettiamo dunque $x=1$ e $y=0$, e poi $x=0$ e $y=1$. Troviamo le due immagini

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di f è quella che ha queste per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I tre vettori di cui calcoliamo la f formano una base di $\mathbb{R}^3$.) Scrivere la matrice (canonica) di f.

Soluzione esercizio 6. Dobbiamo trovare le immagini dei vettori della base canonica. Prima scriviamoli in termini dei tre vettori dati: i coefficienti si trovano come al solito risolvendo i sistemi lineari (3 equazioni in 3 incognite):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ora possiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica, grazie al fatto che f è lineare:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -5f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Trovare un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e scriverne la matrice (canonica).

Soluzione esercizio 7. Per dare un'applicazione lineare, basta definire le immagini dei vettori di una base. Due vettori hanno già l'immagine fissata, e sono linearmente indipendeni, per cui prendiamoli come primi vettori di una base. Ne servono altri 2, proviamo a mettere i primi 2 della base canonica: otteniamo 4 vettori che messi come colonne di una matrice forniscono

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante è non nullo, infatti se lo sviluppiamo secondo l'ultima colonna otteniamo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$$

Allora abbiamo una base. Sappiamo già quali devono essere le immagini dei primi due vettori, e siamo liberi di fissare le immagini degli altri due a piacere. Fissiamo per semplicità

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le immagini dei vettori della base canonica. Abbiamo già le immagini dei vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

rimangono da determinare le immagini di

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo questi vettori come combinazione lineare della nostra base (di nuovo: si vede a occhio, oppure si risolve il sistema che fornisce i coefficienti):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Segue:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire, giusificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 8. I tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, perché

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 - 12 - 2 = 0$$

Esiste quindi una relazione di dipendenza lineare fra essi. Troviamo una combinazione lineare uguale al vettore nullo: a occhio, o risolvendo il sistema che ha come incognite i coefficienti, troviamo

$$-4v_1 + 3v_2 - v_3 = O$$

Se esiste f con le proprietà richieste dall'esercizio, allora deve valere

$$-4f(v_1) + 3f(v_2) - f(v_3) = O$$

Ma

$$-4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq O$$

per cui la f cercata non esiste.

Esercizio 9. Trovare generatori del nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ e generatori dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - w \\ z + 2w \end{pmatrix}$$

Calcolare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzione esercizio 9. Il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove A è la matrice di f. Calcoliamo A, trovando le immagini dei vettori della base canonica e mettendoli in colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice è A già a scalini, con due pivot. Le soluzioni dipendono da due parametri $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ che assegnamo alle variabili "libere" y e w; le altre variabili si ricavano da esse:

$$\begin{cases} x &= s_2 - s_1 \\ y &= s_1 \\ z &= -2s_2 \\ w &= s_2 \end{cases}$$

Per trovare dei generatori delle soluzioni, usiamo lo stesso procedimento usato per trovare una base: assegniamo valori $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$ e poi $s_1 = 0$, $s_2 = 1$. Otteniamo

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che sono quindi generatori di $\mathrm{Ker}(f)$. Per trovare generatori di $\mathrm{Im}(f)$, basta prendere le immagini di generatori di $\mathbb{R}^4$, ad esempio i vettori della base canonica. Quindi $\mathrm{Im}(f)$ è generata da

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Non è necessario osservarlo, ma in questo caso chiaramente il primo e il quarto sono superflui: il secondo e il terzo già generano tutto $\mathbb{R}^2$, quindi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ e si possono prendere anche solo $f(e_2), f(e_3)$ come generatori.

Esercizio 10. Trovare, dandone la matrice canonica, un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e tale che l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 10. Se potessimo dare la matrice di f rispetto a due basi scelte da noi, sarebbe semplice. Infatti, prendiamo una base che comprenda u_1 e u_2, ad esempio (u_1, u_2, u_3) dove u_3 è il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si tratta di una base perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Possiamo scegliere a piacere le immagini dei vettori della base prescelta, e avremo una f lineare. Dato che il nucleo dev'essere lo spazio generato da u_1 e u_2, poniamo

$$f(u_1) = f(u_2) = O.$$

L'immagine di f deve essere generata da w_1, quindi in particolare deve contenere w_1. Possiamo allora porre

$$f(u_3) = w_1.$$

Questo determina una f lineare. Troviamo il nucleo in termini di u_1, u_2, u_3: si tratta dell'insieme delle combinazioni lineari $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ tali che

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = O$$

Ora:

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + a_3f(u_3) = a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo è il vettore nullo se e solo se $a_3 = 0$, cioè il nucleo di f è proprio l'insieme delle combinazioni lineari $a_1u_1 + a_2u_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ a piacere. Segue che è generato da u_1 e u_2.

L'immagine di f è generata dalle immagini dei vettori di una base. Se prendiamo la base (u_1, u_2, u_3), le loro immagini sono rispettivamente O, O, w_1, quindi questi vettori generano $\mathrm{Im}(f)$. Chiaramente il vettore nullo è superfluo qui, per cui w_1 genera $\mathrm{Im}(f)$.

Rimane da trovare la matrice canonica di f. Dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica, e per questo li scriviamo in termini di u_1, u_2, u_3:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 - u_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 - u_1 - u_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3.$$

Le loro immagini allora sono

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(u_1) - f(u_3) = O - w_1 = -w_1,$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(u_2) - f(u_1) - f(u_3) = O - O - w_1 = -w_1,$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(u_3) = w_1$$

Mettendo questi tre vettori in una matrice otteniamo la matrice di f:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$