Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.6

Esercizio 1. (1) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Sia M la matrice che permette di passare, per qualsiasi vettore, dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$, cioè

$$M = \mathrm{Mat}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1), \ldots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_n))$$

dove $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Scrivere in modo semplice, usando M, la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

(2) Sia N la matrice che permette di passare dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ alle coordinate rispetto a una terza base $\mathcal{B}''$ di V. Come si può scrivere, in termini di M ed N, la matrice che permette di passare direttamente dalle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ a quelle rispetto a $\mathcal{B}''$?

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sia $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ la base formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sia $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una base di $\mathbb{R}^2$, tale che le coordinate dei vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovare $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(2) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ c \cdot d \end{pmatrix}$$

(3) $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che, data una matrice A, il valore di $f(A)$ è uguale alla somma di tutte le entrate di A. (Ricordiamo che $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici 2×2 con entrate numeri reali.)

(4) $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi in x) data da $f(p(x)) = p(2)$, cioè f associa ad un polinomio qualsiasi $p(x)$ il valore del polinomio in $x = 1$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data dalla formula

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -2y \\ 3x-y \\ x \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice (canonica) di f.

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I tre vettori di cui calcoliamo la f formano una base di $\mathbb{R}^3$.) Scrivere la matrice (canonica) di f.

Esercizio 7. Trovare un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e scriverne la matrice (canonica).

Esercizio 8. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire, giusificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Trovare generatori del nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ e generatori dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-w \\ z+2w \end{pmatrix}$$

Calcolare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 10. Trovare, dandone la matrice canonica, un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e tale che l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ sia il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$