Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.5

Esercizio 1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

e W dal sistema omogeneo

$$(S')\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Trovare un sistema omogeneo che definisca la somma $U + W$, e uno che definisca l'intersezione $U \cap W$.

Soluzione esercizio 1. L'intersezione $U \cap W$ è definita dal sistema che comprende tutte le equazioni, quelle di U e quelle di W:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Per la somma $U + W$, non abbiamo (ancora) alcuna scorciatoia. Dobbiamo allora trovare generatori di U e di W, metterli insieme ottenendo generatori di $U + W$, e poi dedurne delle equazioni per $U + W$.

Per trovare generatori di U e di W risolviamo i sistemi, le soluzioni sono:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3s+t}{2} \\ -\frac{5s+3t}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathrm{Sol}(S') = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3s+t}{2} \\ -2s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(Ricordiamo che le soluzioni potrebbero essere scritte in modo diverso, non significa che siano sbagliate: dipende dal metodo usato per risolvere i sistemi. Anche usando solo l'algoritmo di Gauß, si possono fare scelte diverse per ridurre le matrici a scalini, e anche questo può produrre soluzioni scritte in modo diverso.)

Assegnando come al solito $s = 1$ e $t = 0$, e poi $s = 0$ e $t = 1$, otteniamo due vettori di U:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come al solito, si verifica facilmente che sono generatori delle soluzioni di S e sono linearmente indipendenti. Quindi (u_1, u_2) è una base di U.

Lo stesso procedimento per S' fornisce la base (w_1, w_2) formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segue che $U + W$ è generato da u_1, u_2, w_1, w_2, cioè

$$U + W = L[u_1, u_2, w_1, w_2].$$

Per trovare delle equazioni, prima troviamo una base. Notiamo che il rango della matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, w_1, w_2)$ è inferiore a 4, perché il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{5}{4} + 1\right) + \left(-\frac{9}{4} - 1 + \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

Allora $\dim(U + W) < 4$, e almeno un generatore dei 4 che abbiamo trovato è superfluo. Proviamo a scartare il primo, rimarremmo con u_2, w_1, w_2, e osserviamo che

$$\dim(L[u_2, w_1, w_2]) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si vede che il rango è 3 ad esempio togliendo la prima riga: il minore che rimane è invertibile.

Allora $L[u_2, w_1, w_2]$ è un sottospazio di $U + W$ e ha dimensione 3. Dato che la dimensione di $U + W$ è *al massimo* 3, deduciamo che $U + W$ ha dimensione 3 e che $U + W = L[u_2, w_1, w_2]$.

Quindi una base di $U + W$ è (u_2, w_1, w_2). Per trovare delle equazioni, mettiamo i vettori in colonna e aggiungiamo una colonna di incognite. Richiediamo che il rango della matrice ottenuta sia 3 (lo stesso senza incognite):

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & x_1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 3$$

Dato che il minore in basso a sinistra è invertibile, sappiamo che il rango è almeno 3. Per non avere più di 3, il determinante di tutta la matrice deve essere nullo. Questo produce il nostro sistema (di una equazione in 4 incognite) che descrive $U + W$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & x_1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 0$$

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dal sistema omogeneo

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È vero che $W \subseteq U$? È vero che $U = W$?

Soluzione esercizio 2. Per verificare che $W \subseteq U$, osserviamo che le entrate dei generatori di W dati dall'esercizio soddisfano le equazioni che definiscono U. Allora questi generatori sono in U, e segue che tutto W è contenuto in U. Quindi la risposta alla prima domanda è "sì".

Per vedere se $U = W$, controlliamo prima le dimensioni. La dimensione di W è al massimo due, perché è generato da 2 vettori (in realtà la dimensione è proprio 2, perché si vede subito che i due vettori sono linearmente indipendenti).

Invece U è lo spazio delle soluzioni di un sistema di 2 equazioni in 5 incognite. Se applicassimo l'algoritmo di Gauß, arriveremmo ad una matrice a scalini che ha al massimo 2 pivot (facendo i conti si vede che sono proprio 2), per cui avremmo almeno 3 variabili libere. Col solito procedimento per ottenere una base, avremmo quindi almeno 3 vettori in una base di U.

Quindi $\dim(W) \leq 2$ e $\dim(U) \geq 3$, da cui deduciamo che U e W non possono essere uguali.

Esercizio 3. Calcolare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. Le coordinate di v sono date dalla soluzione dell'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3, cioè esplicitamente

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

Questa equazione, che coinvolge vettori di $\mathbb{R}^3$, è equivalente al sistema seguente, in tre equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 & = & 1-t \\ 3x_2 + 4x_3 & = & 3t \end{cases}$$

Risolviamolo. Possiamo scriverlo in forma matriciale, come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

Conviene, perché l'esercizio ci dice che i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono una base, per cui la matrice dei coefficienti del sistema è invertibile. Calcoliamo l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora calcolare le soluzioni moltiplicando a sinistra per quest'inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3t \\ 2-t \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Questa è allora la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 5-3t \\ 2-t \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori v_1, v_2, v_3 dell'esercizio precedente. Sia v il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino le coordinate di v rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione esercizio 4. Le coordinate di un vettore qualsiasi rispetto alla base canonica sono le sue entrate. Calcoliamo quindi il vettore v esplicitamente. Basta prendere la combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 con i coefficienti dati da $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$:

$$v = 6v_1 - v_2 + 2v_3 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Queste sono allora anche le coordinate di v rispetto alla base canonica. Se denotiamo come $\mathcal{E}$ la base canonica, possiamo scrivere

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia U l'insieme delle matrici simmetriche 3×3. Dimostrare che U è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 3×3, e trovarne una base.

Soluzione esercizio 5. Dimostriamo che U è un sottospazio. Si vede facilmente che:

(1) la matrice nulla è simmetrica, per cui appartiene a U,
(2) la somma di matrici simmetriche è simmetrica,
(3) riscalare una matrice simmetrica per un numero reale la mantiene simmetrica.

Segue che U è un sottospazio vettoriale.

Per trovare una base, sfruttiamo il fatto che una matrice 3×3 è simmetrica esattamente quando alcune entrate si ripetono. Più precisamente, è simmetrica proprio quando la possiamo scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Allora la possiamo scrivere come combinazione lineare delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti

$$A = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 + d \cdot A_4 + e \cdot A_5 + f \cdot A_6$$

Questo è anche l'unico modo di scrivere A usando queste sei matrici: è evidente che se usassimo numeri diversi da a, b, c, d, e, f otterremmo una matrice diversa da A. Quindi $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ è una base di U.

Esercizio 6. Sia A una matrice $n \times n$.

(1) Dimostrare che $A+A^t$ è una matrice simmetrica, e che $A-A^t$ è una matrice antisimmetrica.
(2) Dimostrare che A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.
(3) Rispondere alle domande seguenti, giustificando la risposta (se sì, dimostrarlo, altrimenti trovare un controesempio):
  (a) è vero che $A \cdot A^t$ è sempre simmetrica?
  (b) è vero che è sempre uguale a $A^t \cdot A$?

Soluzione esercizio 6. (1) Facciamo la trasposta di $B = A + A^t$. Chiamando come al solito $a_{i,j}$ l'entrata di A alla riga i e colonna j, osserviamo che l'entrata $b_{i,j}$ corrispondente di B è uguale a $a_{i,j} + a_{j,i}$. Allora alla riga j e colonna i la matrice B ha l'entrata $b_{j,i} = a_{j,i} + a_{i,j}$, che però è uguale a $b_{i,j}$. Quindi B è simmetrica.

Si può anche osservare che la trasposta di una somma è uguale alla somma delle trasposte (è un'uguaglianza che si verifica facilmente). Allora si può scrivere

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = B$$

per cui B è simmetrica. Sia ora $C = A - A^t$. Allora (in modo simile alla prima parte) abbiamo $c_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i}$, che è uguale a $c_{j,i}$ ma cambiato di segno. Segue $C^t = -C$, cioè C è antisimmetrica.

(2) Visto che $A+A^t$ è simmetrica, lo è anche la matrice $\frac{1}{2}(A+A^t)$. Allo stesso modo, la matrice $\frac{1}{2}(A-A^t)$ è antisimmetrica. Allora basta osservare che

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{antisimmetrica}}$$

(3) (a) Ricordiamo che il prodotto delle trasposte è la trasposta del prodotto, ma con l'ordine invertito. Cioè, date due matrici A e D (entrambe $n \times n$), abbiamo

$$(A \cdot D)^t = D^t \cdot A^t.$$

Ne deduciamo che

$$(A \cdot A^t)^t = \underbrace{(A^t)^t}_{=A} \cdot A^t = A \cdot A^t$$

per cui la risposta alla domanda è "sì".

(b) Non è vero che $A \cdot A^t = A^t \cdot A$ per qualsiasi matrice A. Ad esempio, prendendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ma

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi in questo caso

$$A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$$

e la risposta alla domanda dell'esercizio è "no".

Esercizio 7. Ricordiamo che $\mathrm{GL}(n)$ è l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$. Dire, giustificando la risposta, se $\mathrm{GL}(3)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Soluzione esercizio 7. Sappiamo che la matrice nulla non è invertibile, infatti il suo determinante è zero. Quindi non appartiene a $\mathrm{GL}(3)$, che perciò non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 8. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Calcolare le coordinate dei vettori della base, rispetto alla base stessa, cioè calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i)$ per qualsiasi i da 1 a n.

Soluzione esercizio 8. Dobbiamo esprimere ogni vettore v_i come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. Questo è facile, basta assegnare 1 come coefficiente a v_i stesso, e 0 agli altri:

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

In altre parole

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove l'1 compare alla riga i-esima.

Esercizio 9. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno stesso spazio vettoriale. Supponiamo che le coordinate di tutti i vettori siano sempre le stesse, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, cioè supponiamo che valga

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

per ogni $v \in V$. Dimostrare che allora le due basi sono uguali. (Suggerimento: si può usare la risposta all'esercizio precedente.)

Soluzione esercizio 9. Denotiamo i vettori di $\mathcal{B}$ come $v_1, \dots, v_n$ e quelli di $\mathcal{B}'$ come $v'_1, \dots, v'_n$. Consideriamo v_1: sappiamo (vedi l'esercizio precedente) che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cioè i coefficienti da mettere davanti a $v'_1, \dots, v'_n$ per ottenere v_1 sono $1, 0, \dots, 0$:

$$v_1 = 1 \cdot v'_1 + 0 \cdot v'_2 + \ldots + 0 \cdot v'_n$$

Allora $v_1 = v'_1$. Allo stesso modo, dato un vettore qualsiasi v_i della prima base, sappiamo che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove l'1 compare alla riga i-esima. Allora ne deduciamo che

$$v_i = 0 \cdot v'_1 + \ldots + 0 \cdot v'_{i-1} + 1 \cdot v'_i + 0 \cdot v'_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v'_n$$

per cui $v_i = v'_i$. Segue che $v_1 = v'_1, v_2 = v'_2, \dots, v_n = v'_n$, cioè $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, e sia $w = sv_1 + tv_2$ dove s e t sono numeri reali. Trovare i valori di $s, t \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{B}' = (v_1, w)$ è una base di V.

Soluzione esercizio 10. Visto che la dimensione è 2, basta avere due vettori linearmente indipendenti per avere una base. Ora, se $t = 0$ allora i due vettori sono v_1 e $w = sv_1$, che sono proporzionali, per cui linearmente dipendenti. Per cui sicuramente è necessario avere $t \neq 0$ per avere una base.

Dimostriamo che se $t \neq 0$ allora i vettori v_1 e w sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una combinazione lineare uguale al vettore nullo:

$$av_1 + bw = O$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Sostituiamo $w = sv_1 + tv_2$ e otteniamo

$$O = av_1 + b(sv_1 + tv_2) = (a + bs)v_1 + btv_2$$

Dato che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, i coefficienti dell'ultima combinazione lineare devono essere nulli, cioè

$$a + bs = bt = 0$$

Sappiamo che $t \neq 0$, quindi $b = 0$. Allora $a + bs = a$, che dev'essere anch'esso 0. Cioè $a = b = 0$, che è quello che volevamo dimostrare.

Quindi $\mathcal{B}'$ è una base se e solo se $t \neq 0$.