# Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.5

1.11.2018

**Esercizio 1.** Sia $U$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

e $W$ dal sistema omogeneo

$$(S')\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Trovare un sistema omogeneo che definisca la somma $U+W$, e uno che definisca l'intersezione $U \cap W$.

**Esercizio 2.** Sia $U$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dal sistema omogeneo

$$(S)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{cases}$$

e $W$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È vero che $W \subseteq U$? È vero che $U = W$?

**Esercizio 3.** Calcolare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori $v_1, v_2, v_3$ dell'esercizio precedente. Sia $v$ il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino le coordinate di $v$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.** Sia $U$ l'insieme delle matrici simmetriche $3 \times 3$. Dimostrare che $U$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $3 \times 3$, e trovarne una base.

**Esercizio 6.** Sia $A$ una matrice $n \times n$.

(1) Dimostrare che $A + A^t$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^t$ è una matrice antisimmetrica.
(2) Dimostrare che $A$ si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

(3) Rispondere alle domande seguenti, giustificando la risposta (se sì, dimostrarlo, altrimenti trovare un controesempio):
   (a) è vero che $A \cdot A^t$ è sempre simmetrica?
   (b) è vero che è sempre uguale a $A^t \cdot A$?

**Esercizio 7.** Ricordiamo che $\mathrm{GL}(n)$ è l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$. Dire, giustificando la risposta, se $\mathrm{GL}(3)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 8.** Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di uno spazio vettoriale $V$. Calcolare le coordinate dei vettori della base, rispetto alla base stessa, cioè calcolare $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i)$ per qualsiasi $i$ da 1 a $n$.

**Esercizio 9.** Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno stesso spazio vettoriale. Supponiamo che le coordinate di tutti i vettori siano sempre le stesse, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, cioè supponiamo che valga

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

per ogni $v \in V$. Dimostrare che allora le due basi sono uguali. (Suggerimento: si può usare la risposta all'esercizio precedente.)

**Esercizio 10.** Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base di uno spazio vettoriale $V$ di dimensione 2, e sia $w = sv_1 + tv_2$ dove $s$ e $t$ sono numeri reali. Trovare i valori di $s, t \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{B}' = (v_1, w)$ è una base di $V$.