Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.4

Esercizio 1. Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Si noti che dipendono tutti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2, v_3]$ generato da v_1, v_2 e v_3, al variare del parametro t.

Soluzione esercizio 1. Sappiamo che $\dim(L[v_1, v_2, v_3])$ è uguale al rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & t \\ t & 2 & 2t \\ -1 & 1-t & -t \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è

$$-\frac{t^3 - 4t^2 + 4t}{2}.$$

Tutti i valori di t per cui questo determinante è $\neq 0$ corrispondono ad una matrice di rango massimo, cioè 3, e questa è anche la dimensione cercata.

I valori per cui il determinante è 0 si calcolano facilmente, osservando che il numeratore che appare nel determinante è uguale al polinomio $t(t-2)^2$, le cui radici sono $t = 0$ e $t = 2$.

Vediamo la matrice per questi tre valori. Sappiamo che il rango in questi casi è ≤ 2. Con $t = 0$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che il rango è 2, grazie al fatto che il minore 2×2 in alto a sinistra è invertibile. Quindi la dimensione cercata è 2.

Come verifica, possiamo osservare che per $t = 0$ abbiamo $v_3 = O$, per cui v_3 è superfluo e abbiamo $L[v_1, v_2, v_3] = L[v_1, v_2]$. Inoltre, sempre per $t = 0$, i due vettori v_1 e v_2 non sono proporzionali, per cui sono linearmente indipendenti, e quindi (v_1, v_2) è una base di $L[v_1, v_2]$, che ha allora dimensione 2.

Con $t = 2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Qui il rango è 1, perché tutte le colonne sono proporzionali (la prima è uguale alla seconda, e la terza è il doppio delle altre). Quindi la dimensione cercata è 1.

Come verifica, possiamo anche osservare che per $t = 2$ i vettori v_2 e v_3 sono entrambi combinazioni lineari di v_1, ne deduciamo che $L[v_1, v_2, v_3] = L[v_1]$, ed essendo $v_1 \neq O$, concludiamo che (v_1) è una base di $L[v_1, v_2, v_3]$, che quindi ha dimensione 1.

Esercizio 2. Supponiamo di avere vettori v_1, v_2, v_3, v_4 in uno spazio vettoriale V. Supponiamo che (v_1, v_2) sia una base di $L[v_1, v_2]$, e che (v_3, v_4) sia una base di $L[v_3, v_4]$. Supponiamo inoltre che

$$L[v_1, v_2] \cap L[v_3, v_4] = \{O\}.$$

Dimostrare che allora i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo prima di tutto che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti (presi solo in due), e anche v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti (presi solo in due), perché formano rispettivamente due basi di due sottospazi vettoriali. Supponiamo di avere una combinazione lineare

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = O$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ in $\mathbb{R}$, e dimostriamo che allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Portiamo v_3 e v_4 a destra:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = -\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4$$

Notiamo che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ è in $L[v_1, v_2]$, mentre $-\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4$ è in $L[v_3, v_4]$. Ma sono uguali, per cui si tratta di un vettore che è contemporaneamente in $L[v_1, v_2]$ e $L[v_3, v_4]$, cioè abbiamo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in L[v_1, v_2] \cap L[v_3, v_4].$$

Ma sappiamo che $L[v_1, v_2] \cap L[v_3, v_4] = \{O\}$, per cui

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = O.$$

Ora, sappiamo che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, per cui $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Inoltre $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = -\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4$, e quindi abbiamo anche

$$-\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4 = O.$$

Anche v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, e ne deduciamo che $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base della somma $U + W$ e una base dell'intersezione $U \cap W$.

Soluzione esercizio 3. Calcolare una base di $U + W$ è semplice, per cui lo facciamo come prima cosa. Infatti, basta mettere insieme i vettori delle due basi per ottenere un insieme di generatori di $U + W$, in altre parole abbiamo

$$U + W = L[u_1, u_2, w_1, w_2].$$

Per avere una base, basta scartare (eventualmente) qualcuno dei 4 vettori, fino ad arrivare ad un insieme linearmente indipendente.

Vediamo ad esempio se si può scartare w_2, cioè se è combinazione lineare di u_1, u_2, w_1. Dobbiamo prendere l'equazione in cui w_1 si pone uguale ad una combinazione lineare di u_1, u_2, w_1, con coefficienti incognite x_1, x_2, x_3, e vedere se l'equazione ha soluzione. Cioè

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = w_1.$$

Questo si traduce in un sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite. Possiamo usare il teorema di Rouché-Capelli: calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa. Le due matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti ha determinante -2, quindi il rango è 3. La matrice completa ha rango anch'essa 3 (il minore 3×3 di sinistra è la matrice di prima, ed è invertibile), per cui il sistema è compatibile. Quindi esistono coefficienti che, messi al posto di x_1, x_2, x_3, rendono w_2 combinazione lineare di u_1, u_2, w_1. Non serve calcolarli: sapendo che esistono, sappiamo che w_2 è superfluo, quindi $L[u_1, u_2, w_1, w_2] = L[u_1, u_2, w_1]$.

Proseguiamo nella nostra ricerca di una base. A prima vista i vettori u_1, u_2, w_1 non sembrano linearmente dipendenti: per esserne sicuri, calcoliamo il rango della matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, w_1)$. Ma questo rango l'abbiamo già calcolato, perché è la matrice A di prima, e sappiamo che ha rango 3. Quindi i vettori u_1, u_2, w_1 sono linearmente indipendenti. Abbiamo dunque trovato una base di $U + W$, e cioè (u_1, u_2, w_1).

Osservazione supplementare. Notiamo che per decidere quale vettore scartare abbiamo ragionato sul rango delle matrici coinvolte: sapevamo che il rango della matrice A' non poteva essere 4, e abbiamo trovato il minore A che è 3×3 ed invertibile. Allora abbiamo potuto "scartare la colonna che avanza", la quarta, cioè abbiamo potuto scartare il quarto vettore. Quelli che rimangono sono linearmente indipendenti proprio perché formano una matrice A di rango 3 che è uguale al numero di vettori. Non è difficile convincersi che questo metodo funziona sempre, per trovare quale vettore scartare - o quali vettori scartare. Cioè tutto sommato la parte col sistema omogeneo e Rouché-Capelli si può anche omettere. Se però questa osservazione risulta un po' oscura, si può sempre il ragionamento completo fatto sopra, col sistema omogeneo di equazioni e Rouché-Capelli. È sicuramente corretto e facile da ricordare.

Vediamo ora l'intersezione $U \cap W$. Sappiamo che $U + W$ ha dimensione 3, per la prima parte dell'esercizio. Allora, anche se non è strettamente necessario, è utile applicare innanzitutto la formula di Graßmann, visto che si vede facilmente che U ha dimensione 2 (infatti u_1 e u_2 non sono proporzionali) e anche W (infatti w_1 e w_2 non sono proporzionali). Otteniamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Allora siamo sicuri che una base qualsiasi di $U \cap W$ contiene un solo vettore.

Per calcolarla, usiamo la "scorciatioia" vista a lezione. Scriviamo cioè un vettore di U come combinazione lineare di u_1 e u_2, con coefficienti che sono incognite. Poi facciamo lo stesso con W, e uguagliamo:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_3 w_1 + x_4 w_2$$

Questa si traduce in un sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$S) \begin{cases} x_1 & = & x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 & = & -x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 & = & -x_3 \end{cases}$$

Risolvendo, troviamo l'insieme delle soluzioni seguente:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dobbiamo trovare solo un vettore (diverso dal vettore nullo) per avere una base di $U \cap V$, quindi assegnamo un valore non nullo a t. Ad esempio poniamo $t = 1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Attenzione: **questo non è** un vettore di $U \cap W$! È un vettore le cui entrate, **sostituite a** x_1, x_2, x_3, x_4, **forniscono un vettore di** $U \cap W$.

Cioè mettiamo $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, ottenendo il vettore

$$-3u_1 + 2u_2 = w_1 + 2w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che è in $U \cap W$. È non nullo, quindi da solo costituisce una base di $U \cap W$.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Trovare un sistema lineare omogeneo S tale che U sia definito dalle equazioni di S, cioè tale che $U = \mathrm{Sol}(S)$.

Soluzione esercizio 4. Conviene prima vedere se uno dei tre vettori u_1, u_2, u_3 è superfluo, e in tal caso rimuoverlo. Questo si verifica se il rango della matrice che li ha per colonne non è uguale al loro numero, cioè 3. La matrice è

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Usiamo il teorema degli orlati: il minore 2×2 in alto a sinistra è invertibile, e i suoi due orlati sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

I due determinanti sono (sviluppando per la prima colonna):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 6) + (-1) \cdot (-6 + 4) = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7 + 9) + 1 \cdot (-6 + 4) = 2 - 2 = 0$$

Quindi, per il teorema degli orlati, il rango di $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$ è 2. Segue che uno fra u_1, u_2, u_3 è superfluo. Proviamo se u_3 è superfluo: lo è se è combinazione lineare di u_1 e u_2.

Come nell'esercizio precedente, per vedere se u_3 è superfluo basta verificare che il rango della matrice che ha solo u_1 e u_2 sia uguale al rango di quella che ha anche u_3.

D'altronde, abbiamo visto a lezione che $L[u_1, u_2, u_3] = L[u_1, u_2]$ proprio quando u_3 è combinazione lineare di u_1 e u_2, e sapendo che la dimensione di $L[u_1, u_2, u_3]$ è 2, basta dimostrare che $L[u_1, u_2]$ ha dimensione 2. Questo è vero, perché la matrice è

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha il minore 2×2 in alto invertibile, per cui ha rango 2 proprio come $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$.

Allora abbiamo anche che u_1, u_2 sono linearmente indipendenti, e (u_1, u_2) è una base di $L[u_1, u_2, u_3]$.

Per trovare delle equazioni di U, mettiamo i vettori della base trovata in colonna, assieme ad una colonna di incognite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & -2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix}$$

La condizione che cerchiamo di descrivere è che questa matrice abbia rango 2. Troviamo un minore 2×2 invertibile nella parte senza incognite, ad esempio quello in alto a sinistra, e mettiamo a zero i determinanti dei suoi orlati, cioè

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & -2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Sviluppando i determinanti per la terza riga, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 \cdot (1) - x_2 \cdot (-2+2) + x_3 \cdot (1) & = & 0 \\ x_1 \cdot (-1) - x_2 \cdot (3-2) + x_4 \cdot (1) & = & 0 \end{cases}$$

ovvero un sistema che risponde al quesito dell'esercizio è

$$S) \begin{cases} x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Calcolare la dimensione dell'intersezione $U \cap W$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(Nota: non si richiede di determinare dei generatori o una base dell'intersezione, né di esprimerla mediante un sistema omogeneo.)

Soluzione esercizio 5. Dato che dobbiamo solo calcolare $\dim(U \cap W)$, è probabile che la formula di Graßmann sia sufficiente:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

Ora, calcoliamo le dimensioni di U e W calcolando il rango delle matrici formate dai generatori dati. Per U, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il minore ottenuto eliminando la prima riga ha determinante 16, quindi il rango è 3. Segue che $\dim(U) = 3$.

Per W, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Il rango è 2, quindi $\dim(W) = 2$. Rimane da calcolare la dimensione di $U + W$. Un insieme di generatori è ottenuto mettendo insieme generatori di U e generatori di W, per cui

$$U + W = L[u_1, u_2, u_3, w_1, w_2]$$

e la sua dimensione è il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolarne il rango. Possiamo intanto usare l'operazione di riga $R_4 \to R_4 + R_2$ e ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Scambiamo le prime due righe, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Con l'operazione di riga $R_3 \to R_3 - 2R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

e con $R_4 \to R_4 - 3R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

e infine scambiando le ultime due righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo raggiunto una matrice a scalini, con 4 pivot: quindi il rango è 4, cioè $\dim(U + W) = 4$. Mettendo insieme quanto ottenuto, deduciamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

Esercizio 6. (difficile) Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Soluzione esercizio 6. Se assumiamo che $U \subseteq W$, allora $U \cup W = W$, per cui è uno sottospazio vettoriale. Stesso ragionamento se $W \subseteq U$: in questo caso $U \cup W = U$, ed è un sottospazio vettoriale.

Viceversa, assumiamo che $U \cup W$ sia un sottospazio vettoriale. Dobbiamo dimostrare che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$. Se $U \subseteq W$, allora abbiamo già finito. Occupiamoci del caso in cui U non è contenuto in W: dovremo dimostrare che $W \subseteq U$.

Se supponiamo che U non è contenuto in W, allora stiamo supponendo che esiste un vettore $u \in U$ non appartenente a W, può essere utile osservarlo.

Per dimostrare che $W \subseteq U$, dobbiamo prendere un elemento qualsiasi $w \in W$, e dimostrare che $w \in U$. Sappiamo che $u \in U$ e che $w \in W$, quindi sono entrambi in $U \cup W$. Visto che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale, la somma $u + w$ è in $U \cup W$.

Questo vuol dire che $u + w$ appartiene a U oppure a W. Nel secondo caso, cioè se avessimo $u + w \in W$, allora potremmo risottrarre w sapendo di rimanere in W. Cioè

$$\underbrace{\underbrace{u + w}_{\in W} - w}_{\in W} = u.$$

Questo però contraddirebbe il fatto che u **non è** un elemento di W. Per cui la seconda possibilità non può verificarsi.

Rimane solo la prima, cioè deve essere $u + w \in U$. Allora

$$\underbrace{\underbrace{u + w}_{\in U} - u}_{\in U} = w,$$

cioè abbiamo ottenuto quello che volevamo: $w \in U$.

Esercizio 7. Calcolare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 7. Le coordinate di v sono le soluzioni dell'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v,$$

cioè

$$x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questo è un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 + x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile, e ha un'unica soluzione:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{3}{4} \\ x_2 & = & \frac{11}{4} \end{array}$$

Per cui

$$v = -\frac{3}{4} v_1 + \frac{11}{4} v_2.$$

Cioè le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Verificare che i seguenti polinomi

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) & = & x^2, \\ p_2(x) & = & x + 1, \\ p_3(x) & = & x^4 + x^3 + x^2 + x, \\ p_4(x) & = & -3x^2 + x, \\ p_5(x) & = & x^4 - x^3 \end{array}$$

sono linearmente indipendenti, considerati come vettori dello spazio vettoriale V dei polinomi in una variabile x e a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ è una base del sottospazio U dei polinomi di grado al massimo 4.

Soluzione esercizio 8. Sappiamo che la dimensione di U è 5, quindi il numero dei polinomi dell'esercizio è giusto. Sono tutti in U, perché hanno tutti grado non superiore a 4. Quindi basta dimostrare che sono linearmente indipendenti (rispondendo alla prima domanda) per ottenere automaticamente che sono una base di U (rispondendo alla seconda domanda).

Dimostriamo dunque che sono linearmente indipendenti, con il solito metodo. Consideriamo una combinazione lineare di questi polinomi, con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, e supponiamo sia il vettore nullo. Scriviamo quest'ultimo come al solito come O, ricordandoci che in questo caso si tratta semplicemente della funzione (di x) costante, uguale a 0 per ogni x:

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) + \lambda_5 p_5(x) = O$$

Dobbiamo dedurre in qualche modo che tutti i λ sono 0. Sostituendo in questa formula le formule esplicite dei polinomi, otteniamo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x + 1) + \lambda_3(x^4 + x^3 + x^2 + x) + \lambda_4(-3x^2 + x) + \lambda_5(x^4 - x^3) = O$$

e raccogliendo le potenze uguali di x otteniamo

$$(\lambda_3 + \lambda_5)x^4 + (\lambda_3 - \lambda_5)x^3 + (\lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4)x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x + \lambda_2 = O$$

L'unico modo per cui il polinomio a sinistra sia costantemente nullo è che tutti i coefficienti siano nulli, cioè

$$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

In altre parole, i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sono soluzioni del sistema di equazioni lineari omogeneo che ha per matrice dei coefficienti la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante per la prima colonna, ottenendo

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots$$

e sviluppando secondo l'ultima riga otteniamo

$$\ldots = +1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 0 + 1 - 0 - 0 - (-1)) = -(1+1) = -2$$

È diverso da 0, per cui la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo è invertibile. Quindi il sistema ha **solo** la soluzione nulla, e cioè $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Abbiamo dimostrato che i polinomi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 9. Calcolare le coordinate del polinomio

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ dell'esercizio precedente.

Soluzione esercizio 9. Dobbiamo trovare coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ tali che

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) + \lambda_5 p_5(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Raccogliamo i coefficienti come nell'esercizio precedente, e uguagliamo i coefficienti delle potenze di x: otteniamo il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4 & = & 3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & -2 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni deduciamo $\lambda_3 = \lambda_5 = 0$, e dall'ultima $\lambda_2 = 1$. Sostituiamo nelle rimanenti:

$$\begin{cases} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_4 & = & 3 \\ 1 + \lambda_4 & = & -2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} \lambda_4 & = & -3 \\ \lambda_1 - 3 \cdot (-3) & = & 3 \end{cases}$$

e dall'ultima ricaviamo $\lambda_1 = 3 - 9 = -6$. Per cui le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(p(x)) = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Sia U il sottoinsieme delle matrici 2×2 in cui la somma degli elementi sulla diagonale principale è zero. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcolarne una base.

Soluzione esercizio 10. Verifichiamo gli assiomi di sottospazio vettoriale.

(1) La matrice nulla

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è in U, infatti la somma dei due elementi sulla diagonale principale è $0 + 0 = 0$.

(2) Date due matrici in U, verifichiamo che la loro somma è in U. Scriviamole come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

La loro somma è la matrice

$$\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}.$$

Dato che le due matrici di partenza sono in U, sappiamo che $a + d = 0$ e che $a' + d' = 0$. Allora, nella terza matrice, sommando gli elementi della diagonale principale otteniamo $a + a' + d + d' = 0$, cioè la terza matrice (la somma delle due) è in U.

(3) Prendiamo una matrice A in U e un numero reale λ, e verifichiamo che λA è in U. Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

e allora

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Visto che $A \in U$, sappiamo che $a + d = 0$, e ne deduciamo che $\lambda a + \lambda d = 0$, cioè $\lambda A \in U$.

Troviamo una base di U. Dato che la somma dei due elementi sulla diagonale principale fa 0, allora uno è l'opposto dell'altro. Cioè un elemento qualsiasi A di U si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sembra che nessuno fra a, b, c sia superfluo, per cui ci aspettiamo che $\dim(U)$ sia 3. Per verificarlo, e trovare anche una base, usiamo la stessa tecnica che usiamo per calcolare una base delle soluzioni di un sistema omogeneo. Cioè diamo valori "semplici" ad a, b, c in tre modi diversi, e vediamo se otteniamo una base.

È una buona idea, come al solito, dare 1 ad uno e 0 agli altri. Mettendo $a = 1$ otteniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre mettendo a 1 gli altri due, a turno, otteniamo le due matrici

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che (A_1, A_2, A_3) è una base di U.

Intanto, le tre matrici devono essere dei generatori, ma questo si verifica facilmente osservando che un elemento qualsiasi A di U, scritto come sopra, è uguale a

$$A = aA_1 + bA_2 + cA_3,$$

infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non solo: questo è l'*unico modo* di scrivere A come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3, perché evidentemente se prendiamo altri coefficienti invece di a, b, c il risultato non è più la matrice A.

Per cui, grazie a un teorema visto a lezione, le matrici A_1, A_2, A_3 sono anche linearmente indipendenti, cioè sono una base di U.