Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.4

25.10.2018

Esercizio 1. Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Si noti che dipendono tutti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2, v_3]$ generato da v_1, v_2 e v_3, al variare del parametro t.

Esercizio 2. Supponiamo di avere vettori v_1, v_2, v_3, v_4 in uno spazio vettoriale V. Supponiamo che (v_1, v_2) sia una base di $L[v_1, v_2]$, e che (v_3, v_4) sia una base di $L[v_3, v_4]$. Supponiamo inoltre che

$$L[v_1, v_2] \cap L[v_3, v_4] = \{O\}.$$

Dimostrare che allora i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base della somma $U + W$ e una base dell'intersezione $U \cap W$.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Trovare un sistema lineare omogeneo S tale che U sia definito dalle equazioni di S, cioè tale che $U = \mathrm{Sol}(S)$.

Esercizio 5. Calcolare la dimensione dell'intersezione $U \cap W$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(Nota: non si richiede di determinare dei generatori o una base dell'intersezione, né di esprimerla mediante un sistema omogeneo.)

Esercizio 6. (difficile) Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Esercizio 7. Calcolare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Verificare che i seguenti polinomi

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2, \\ p_2(x) &= x + 1, \\ p_3(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + x, \\ p_4(x) &= -3x^2 + x, \\ p_5(x) &= x^4 - x^3 \end{aligned}$$

sono linearmente indipendenti, considerati come vettori dello spazio vettoriale V dei polinomi in una variabile x e a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ è una base del sottospazio U dei polinomi di grado al massimo 4.

Esercizio 9. Calcolare le coordinate del polinomio

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ dell'esercizio precedente.

Esercizio 10. Sia U il sottoinsieme delle matrici 2×2 in cui la somma degli elementi sulla diagonale principale è zero. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcolarne una base.