Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.3

Esercizio 1. Dimostrare, usando solo gli assiomi della definizione di spazio vettoriale, che il vettore nullo O di uno spazio vettoriale è l'unico vettore che soddisfa il terzo assioma, e che per ogni $v \in V$ l'opposto $-v$ è l'unico che soddisfa il quarto assioma. Cioè dimostrare che se

$$w + u = u$$

per ogni $u \in V$, allora $w = O$, e che se

$$v + v' = O$$

allora $v' = -v$.

Soluzione esercizio 1. Sia $w \in V$ tale che $u + w = u$ per ogni $u \in V$. In particolare questo vale per il vettore nullo $u = O$, la cui esistenza è assicurata dal terzo assioma. Allora segue

$$O = O + w = w + O = w$$

dove la prima uguaglianza è la proprietà di w appena detta, la seconda è data dal secondo assioma, e la terza uguaglianza è la proprietà del vettore nullo, applicata al vettore w.

Consideriamo ora un vettore $v \in V$, e sia $w \in V$ tale che $v + w = O$. Sommiamo a entrambi i membri l'opposto di v, la cui esistenza è assicurata dal quarto assioma:

$$(v + w) + (-v) = O + (-v)$$

Grazie all'associatività (assioma 1) e alla commutatività (assioma 2) della somma di vettori, e agli assiomi 3 e 4, otteniamo

$$w = w + O = w + (v + (-v)) = (w + v) + (-v) = (v + w) + (-v) = O + (-v) = -v$$

Esercizio 2. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta.

(1) È possibile che l'insieme vuoto sia uno spazio vettoriale?
(2) È possibile che un insieme con solo un elemento sia uno spazio vettoriale?
(3) È possible che un insieme con solo due elementi sia uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)? (suggerimento: si può usare il fatto che $\alpha \cdot O = O$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, che è un esercizio dato in classe)

Soluzione esercizio 2. (1) No. Infatti, per il terzo assioma, l'insieme V deve contenere almeno un elemento, e cioè il vettore nullo O. Osserviamo che invece $V = \varnothing$ (l'insieme vuoto) soddisfa il quarto assioma! Infatti il quarto assioma richiede l'esistenza di $-v$ *per ogni elemento* $v \in V$. Dato che l'insieme vuoto non ha elementi, questo di fatto equivale a non richiedere *alcuna* condizione su V, cioè il quarto assioma, nel caso dell'insieme vuoto, è *automaticamente soddisfatto.*

(2) Sì. In questo caso l'unico elemento di V deve essere il vettore nullo:

$$V = \{O\}$$

Questo insieme è uno spazio vettoriale: possiamo definire la somma di vettori come $O+O = O$ e il prodotto per uno scalare come $\alpha \cdot O = O$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Date queste due definizioni, gli assiomi 1)-8) della definizione di spazio vettoriale sono facilmente verificate.

(3) No. Infatti, almeno uno dei due vettori deve essere il vettore nullo, mentre l'altro non lo è (abbiamo assunto che V abbia esattamente due elementi):

$$V = \{O, v\}$$

con $v \neq O$. Allora esiste l'opposto $-v$ di v. Abbiamo due possibilità per $-v$: o è uguale a O, oppure a v.

Ma se $-v = O$, allora possiamo sommare v a entrambi i membri ottenendo $O = v$, che contraddice il fatto che V ha due elementi distinti. Se invece $v = -v$, sommando v a entrambi i membri otteniamo

$$2v = O$$

Possiamo moltiplicare per $\frac{1}{2}$, ottenendo

$$v = \frac{1}{2} \cdot O = O$$

grazie al suggerimento dato nel testo dell'esercizio (cioè l'esercizio dato in classe). Anche questo contraddice il fatto che V abbia due elementi distinti.

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi U è un sottospazio vettoriale del rispettivo spazio vettoriale V.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tali che $b \geq 0$. (Cioè U è il "semipiano superiore" del piano $\mathbb{R}^2$.)

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

tali che $a+b+c$ è un numero intero (ad es. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, la somma è 3, che è un numero intero).

(3) $V =$ lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ a coefficienti numeri reali, in una incognita x; $U =$ il sottoinsieme dei polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = 1$ (es. $p(x) = 2x^2 - x - 1$ è in U, perché $p(1) = 0$, invece il polinomio $q(x) = 3x^2$ non è in U, perché $q(1) = 3 \neq 0$).

Soluzione esercizio 3. (1) Questo U non è un sottospazio vettoriale. Infatti, per esempio il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è in U, però il suo opposto $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non è in U.

(2) Neppure questo U è un sottospazio vettoriale. Infatti il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è in U, perché la somma delle entrate è $1+1+1 = 3$, che è un numero intero, però posso moltiplicarlo per un numero reale in modo tale che il risultato non è in U. Ad esempio $\frac{1}{2}v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ non è in U, perché la somma delle entrate è $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, che non è un numero intero.

(3) Questo U è un sottospazio vettoriale. Per dimostrarlo, dobbiamo verificare la definizione di sottospazio. Cioè dobbiamo verificare che:
   (a) U contiene il vettore nullo di V,
   (b) se U contiene un vettore, allora contiene anche tutti quelli che ottengo moltiplicando il vettore dato per un numero reale,
   (c) se U contiene due vettori, allora contiene anche la loro somma.

   Vediamo:
   (a) Il vettore nullo O di V è semplicemente il polinomio nullo. Questo polinomio si annulla in $x = 1$, per cui il vettore O è in U.
   (b) Se un polinomio $p(x)$ è in U, allora abbiamo $p(1) = 0$. Dato un numero reale α, moltiplicando $p(x)$ per α ottengo il polinomio $q(x) = \alpha \cdot p(x)$, e vale $q(1) = \alpha \cdot 0 = 0$, per cui anche $q(x)$ è in U.
   (c) Dati due polinomi $a(x)$, $b(x)$ in U, sappiamo che $a(1) = 0$ e $b(1) = 0$. Anche la somma dei due polinomi, cioè $c(x) = a(x) + b(x)$, soddisfa $c(1) = 0$. Per cui la somma di elementi di U è in U.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Cioè $U = L[u_1, u_2, u_3]$.) Determinare $\dim(U)$.

Soluzione esercizio 4. Mettiamo i vettori in una matrice, cioè scriviamo $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$:

$$\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $\dim(U) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3))$. Il rango è sicuramente ≥ 2, visto che il minore M in alto a sinistra ha determinante $4 - 3 = 1 \neq 0$. Il rango però non è 3: questo si può verificare calcolando i determinanti dei due orlati 3×3 di M, e vengono entrambi nulli.

Si può anche osservare che le colonne sono linearmente dipendenti, visto che la terza è la somma delle prime due, e allora il rango è minore del numero di colonne. (Abbiamo visto il risultato analogo con le righe, ma con le colonne è lo stesso, basta prendere la matrice trasposta.)

Quindi il rango è 2, ed è anche la dimensione di U.

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro t, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

è nel sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2]$ generato da v_1 e v_2.

Soluzione esercizio 5. Il vettore v è nel sottospazio vettoriale generato da v_1 e v_2 se e solo se v è combinazione lineare di v_1 e v_2, cioè se e solo se esistono coefficienti x_1, x_2 (visto che li stiamo cercando, li consideriamo delle incognite) tali che

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 = v$$

cioè

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Stiamo cioè cercando le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 &= t-1 \\ x_1 + x_2 &= t \\ 2x_1 &= t+1 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Riduciamola a scalini. Con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

e con $R_3 \to R_3 - 2R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t+1-2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -t+3 \end{pmatrix}$$

e con $R_3 \to R_3 - \frac{4}{3}R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -t+3-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -t+\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice a scalini per ogni valore di t. Però, se $t \neq \frac{5}{3}$, allora uno dei pivot è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema non ha soluzione. Invece per $t = \frac{5}{3}$ nessun pivot è nella colonna dei termini noti (infatti in quel caso i pivot sono solo 1 e 3), per cui il sistema ha (almeno) una soluzione.

Segue che v è combinazione lineare di v_1 e v_2 per $t = \frac{5}{3}$, e non lo è per $t \neq \frac{5}{3}$.

Esercizio 6. Dimostrare che i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

generano lo stesso sottospazio vettoriale generato dai vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente.

Soluzione esercizio 6. Intanto, w_1 è combinazione lineare di v_1 e v_2. Infatti, possiamo usare un procedimento simile all'esercizio precedente, e risolvere il sistema che fornisce i coefficienti della combinazione lineare cercata. Risulta che il sistema ha soluzioni, e i coefficienti cercati sono $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Otteniamo

$$w_1 = v_1 + v_2$$

Lo stesso procedimento fornisce

$$w_2 = -v_1 + v_2$$

Quindi ogni combinazione lineare di w_1 e w_2, cioè ogni vettore della forma

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

si può scrivere anche come

$$w = \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_2 - v_1)$$

e cioè

$$w = (\alpha_1 - \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)v_2$$

In altre parole, w è anche combinazione lineare di v_1 e v_2. Abbiamo dimostrato allora che $L[w_1, w_2] \subseteq L[v_1, v_2]$ (perché ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo).

Viceversa, con lo stesso procedimento possiamo verificare che entrambi v_1 e v_2 sono combinazioni lineari di w_1 e w_2. Infatti, risolvendo i sistemi lineari come fatto prima, otteniamo

$$v_1 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

e

$$v_2 = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

Ne deduciamo stavolta che ogni combinazione lineare di v_1 e v_2 è anche combinazione lineare di w_1 e w_2. Abbiamo dimostrato cioè che $L[v_1, v_2] \subseteq L[w_1, w_2]$.

Mettendo insieme $L[w_1, w_2] \subseteq L[v_1, v_2]$ e $L[v_1, v_2] \subseteq L[w_1, w_2]$, otteniamo $L[v_1, v_2] = L[w_1, w_2]$.

Esercizio 7. Trovare una base del sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 7. Dalla teoria svolta a lezione, sappiamo che possiamo trovare una base scartando **uno a uno** dei generatori, basta che quello che scegliamo di volta in volta sia combinazione lineare dei rimanenti. Ad un certo punto arriveremo ad un insieme di vettori linearmente indipendente, cioè in cui nessuno dei vettori è combinazione lineare degli altri. Allora, messi in ordine (un ordine qualsiasi), formeranno una base.

I tre vettori sono linearmente dipendenti, infatti il rango della matrice $\mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3)$ non è 3, perché il suo determinante è nullo. Troviamone uno che è combinazione lineare degli altri due, sappiamo che esiste. Attenzione: non possiamo sceglierne uno a caso, e dare per scontato che è combinazione lineare degli altri.

Dobbiamo procedere per tentativi. Per esempio, ci chiediamo se u_1 è combinazione lineare degli altri due. Possiamo usare il metodo dell'esercizio 5, oppure riconoscere "a occhio" che u_1 è uguale all'opposto di $u_2 + 2u_3$, cioè

$$u_1 = -u_2 - 2u_3$$

Per cui in effetti possiamo togliere u_1, e rimanere con i vettori

$$u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Questi vettori sono linearmente indipendenti (il rango della matrice è 2), per cui la coppia (u_2, u_3) è una base.

Esercizio 8. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che sono linearmente indipendenti, e trovare altri due vettori v_3, v_4 di $\mathbb{R}^4$ in modo che (v_1, v_2, v_3, v_4) sia una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione esercizio 8. I vettori sono linearmente indipendenti, perché il rango della matrice $\mathrm{Mat}(v_1, v_2)$ è uguale al loro numero, cioè 2. Per trovare v_3 e v_4, iniziamo ad aggiungere i vettori della base canonica

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo e_1. I vettori v_1, v_2, e_1 sono linearmente indipendenti, perché la matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale al numero dei vettori (cioè 3). Quindi possiamo porre $v_3 = e_1$.

Consideriamo e_2. Il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è inferiore a 4. Infatti il determinante è 0, come si vede sviluppando ad esempio secondo la quarta riga. (Altro motivo: la quarta riga è multiplo della terza, per cui le righe sono linearmente dipendenti, per cui il rango non può essere il loro numero.)

Quindi e_2 non va aggiunto ai vettori v_1, v_2, v_3. Consideriamo e_3. Il rango della matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è 4, infatti il determinante è $(-2) \cdot (0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2) = 4$ (sviluppando secondo la quarta riga). Quindi v_1, v_2, v_3, e_3 sono linearmente indipendenti, e deduciamo che $v_4 = e_3$ può essere aggiunto a v_1, v_2, v_3. Quindi una base come richiesto dall'esercizio è (v_1, v_2, v_3, v_4), che è uguale a (v_1, v_2, e_1, e_3).

Esercizio 9. Trovare una base del sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo (nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)

$$S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 9. Troviamo le soluzioni del sistema. La matrice completa è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamola a scalini. Con l'operazione elementare di riga $R_2 \to R_2 - R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I pivot sono nella prima, seconda e quarta colonna. Quindi consideriamo x_3 e x_5 come variabili "libere", assegnando loro valori arbitrari $s, t \in \mathbb{R}$, e ricaviamo le altre. Il sistema corrispondente alla matrice ridotta a scalini è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ -x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Mettendo $x_3 = s$ e $x_5 = t$, ricaviamo le altre:

$$\begin{cases} x_4 & = & 2x_5 = 2t \\ x_2 & = & -x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -s + 6t + 2t = -s + 8t \\ x_1 & = & x_2 - x_4 - x_5 = -s + 8t - 2t - t = -s + 5t \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di S è

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -s + 5t \\ -s + 8t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Avendo due parametri, è probabile che la dimensione di $\mathrm{Sol}(S)$ sia 2. Assegnamo i valori $1, 0$ e $0, 1$ a s, t, ottenendo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

È un buon momento per verificare che abbiamo trovato le soluzioni giuste: infatti sostituendo le entrate di v_1 a $x_1, \ldots, x_5$ vediamo facilmente che il sistema S è soddisfatto, e anche con le entrate di v_2. Quindi v_1 e v_2 sono elementi di $\mathrm{Sol}(S)$.

Inoltre i due vettori generano $\mathrm{Sol}(S)$, infatti data una soluzione qualsiasi

$$v = \begin{pmatrix} -s+5t \\ -s+8t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} -s+5t \\ -s+8t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = sv_1 + tv_2$$

per cui v_1 e v_2 generano $\mathrm{Sol}(S)$. Infine, sono linearmente indipendenti, infatti la matrice

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 8 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Dunque (v_1, v_2) è una base di $\mathrm{Sol}(S)$.

Esercizio 10. Dimostrare che i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generano il sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del sistema lineare dell'esercizio precedente. Estrarre da w_1, w_2, w_3 una base di U.

Soluzione esercizio 10. È semplice sostituire le entrate dei w_1, w_2, w_3 alle incognite e verificare che si ottengono sempre soluzioni del sistema. Per cui w_1, w_2, w_3 sono nel sottospazio $\mathrm{Sol}(S)$ di $\mathbb{R}^5$. Attenzione: se non avessimo risolto già il sistema, ottenendo che $\mathrm{Sol}(S)$ ha dimensione 2, non avremmo un modo semplice di verificare che w_1, w_2, w_3 sono sufficienti a generarlo.

Qui però sappiamo che $\dim(\mathrm{Sol}(S)) = 2$. Come usare al meglio quest'informazione? Il ragionamento è questo. Troviamo 2 vettori linearmente indipendenti fra w_1, w_2, w_3. Allora avremo trovato una base, perché 2 vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione 2 sono sempre una base! Non serve verificare che sono generatori: basta averne il giusto numero.

Ora, w_1 e w_2 non sono linearmente indipendenti, perché sono proporzionali: infatti $w_1 = 2w_2$. Però w_2 e w_3 non sono proporzionali, e infatti è uguale a 2 il rango della matrice $\mathrm{Mat}(w_2, w_3)$ che li ha per colonne.

Dunque w_2, w_3 sono linearmente indipendenti. Per il ragionamento fatto prima, sono anche generatori di U, per cui (w_2, w_3) risponde alla richiesta dell'esercizio.