Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.3

18.10.2018

Esercizio 1. Dimostrare, usando solo gli assiomi della definizione di spazio vettoriale, che il vettore nullo O di uno spazio vettoriale è l'unico vettore che soddisfa il terzo assioma, e che per ogni $v \in V$ l'opposto $-v$ è l'unico che soddisfa il quarto assioma. Cioè dimostrare che se

$$w + u = u$$

per ogni $u \in V$, allora $w = O$, e che se

$$v + v' = O$$

allora $v' = -v$.

Esercizio 2. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta.

(1) È possibile che l'insieme vuoto sia uno spazio vettoriale?
(2) È possibile che un insieme con solo un elemento sia uno spazio vettoriale?
(3) È possible che un insieme con solo due elementi sia uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)? (suggerimento: si può usare il fatto che $\alpha \cdot O = O$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, che è un esercizio dato in classe)

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi U è un sottospazio vettoriale del rispettivo spazio vettoriale V.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tali che $b \geq 0$. (Cioè U è il "semipiano superiore" del piano $\mathbb{R}^2$.)

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $U =$ l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

tali che $a+b+c$ è un numero intero (ad es. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, la somma è 3, che è un numero intero).

(3) $V =$ lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ a coefficienti numeri reali, in una incognita x; $U =$ il sottoinsieme dei polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = 1$ (es. $p(x) = 2x^2 - x - 1$ è in U, perché $p(1) = 0$, invece il polinomio $q(x) = 3x^2$ non è in U, perché $q(1) = 3 \neq 0$).

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Cioè $U = L[u_1, u_2, u_3]$.) Determinare $\dim(U)$.

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro t, il vettore
$$v = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}$$
è nel sottospazio vettoriale $L[v_1, v_2]$ generato da v_1 e v_2.

Esercizio 6. Dimostrare che i vettori
$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
generano lo stesso sottospazio vettoriale generato dai vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente.

Esercizio 7. Trovare una base del sottospazio vettoriale generato dai vettori
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Verificare che sono linearmente indipendenti, e trovare altri due vettori v_3, v_4 di $\mathbb{R}^4$ in modo che (v_1, v_2, v_3, v_4) sia una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 9. Trovare una base del sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo (nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)
$$S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 10. Dimostrare che i vettori
$$w_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
generano il sottospazio vettoriale $U = \mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni del sistema lineare dell'esercizio precedente. Estrarre da w_1, w_2, w_3 una base di U.