Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.2

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 1. Per calcolare il determinante di M conviene sviluppare secondo una riga o una colonna con molti zeri. La quarta colonna, per esempio. Secondo lo schema dei segni, devo iniziare con un segno negativo e procedere a segni alterni:

$$\det(M) = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

Sviluppando con la formula 3×3 i due determinanti che hanno coefficienti non nulli, viene

$$\dots = 1 \cdot (20 + 0 + 2 - 0 - 15 + 4) - 2 \cdot (5 + 0 - 1 - 0 - 0 - 2) = 11 - 4 = 7$$

Per calcolare il determinante di N possiamo cercare allo stesso modo una riga o una colonna con molti zeri. Tuttavia nessuna riga ha meno di tre entrate non nulle, e lo stesso per le colonne. Conviene allora fare qualche operazione di riga, o per semplificare un po' la matrice, o per ridurla proprio a scalini.

In questo caso, conviene usare qualche operazione di riga per far comparire molti zeri, ad es. nella quarta colonna. Con l'operazione $R_2 \to R_2 + 2R_4$ otteniamo la matrice

$$N' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_5 \to R_5 + 2R_4$ otteniamo

$$N'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Le due operazioni di riga non hanno cambiato il determinante, per cui $\det(N) = \det(N'')$. A questo punto sviluppiamo $\det(N'')$ secondo la quarta colonna

$$\det(N'') = -0 + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} - 0$$

Per concludere, dobbiamo calcolare il determinante della matrice 4×4 seguente:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Qui non abbiamo molti zeri. Iniziamo a ridurre la matrice a scalini con operazioni di riga. Facciamo $R_1 \leftrightarrow R_3$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Poi facciamo $R_2 \to R_2 + 4R_1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Con $R_3 \to R_3 - 2R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Con $R_4 \to R_4 - 5R_1$ otteniamo

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & -5 & 14 & -9 \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo continuare fino ad ottenere una matrice a scalini: il determinante sarà il prodotto degli elementi sulla diagonale. Oppure possiamo sviluppare questo determinante 4×4 per la prima colonna, e usare la formula per il 3×3. Viene

$$\det(Q') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & -5 & 14 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (3 \cdot 6 \cdot (-9) + (-9) \cdot (-4) \cdot (-5) + (-3) \cdot 14 \cdot 6 - (-5) \cdot 6 \cdot 6 - (-9) \cdot (-3) \cdot (-9) - 3 \cdot (-4) \cdot 14)$$

$$-162 - 180 - 252 + 180 + 243 + 168 = -3$$

Ricordiamo che abbiamo ottenuto Q' da Q con operazioni di riga del tipo $R_i \to R_i + \lambda R_j$, che non cambiano il determinante, e con **una** operazione del tipo $R_i \leftrightarrow R_j$, che **cambia il segno** al determinante. In altre parole

$$\det(Q) = -\det(Q') = 3$$

Sostituendo nella formula qui sopra che dava il determinante di N'', otteniamo

$$\det(N'') = -\det(Q) = -3,$$

che era anche il determinante cercato, cioè quello di N.

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

trovare le soluzioni dei seguenti sistemi in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$AX = 3X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 2. Il determinante di A è

$$\det(A) = 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 4 = -12.$$

Quindi A è invertibile, e possiamo usare l'inversa per risolvere il primo sistema. Calcoliamo:

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Il primo sistema dunque ha una sola soluzione, data da

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Il secondo sistema invece non ha matrice dei coefficienti A. Infatti possiamo riscriverlo come

$$A \cdot X - 3I \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità 3×3, quindi

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Grazie alla distributività del prodotto di matrici rispetto alla somma, possiamo ancora riscriverlo come

$$(A - 3I) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice **non è** invertibile. Infatti possiamo calcolare il determinante, che viene 0. Oppure, senza fare conti, possiamo anche osservare che la terza riga è un multiplo della seconda. Quindi le righe sono linearmente dipendenti, per cui il rango è minore di 3 (=numero delle righe). Questo succede solo se il determinante è zero.

Per questo motivo non possiamo applicare il metodo di moltiplicare a sinistra per l'inversa: questa inversa non esiste! Dobbiamo risolvere il sistema nel modo solito.

ATTENZIONE: Per risolvere il sistema con l'algoritmo di Gauß dobbiamo prendere la **matrice completa**! Cioè

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la matrice in forma a scalini: con $R_2 \leftrightarrow R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $R_2 \to R_2 + 3R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $R_3 \to R_3 + 2R_1$ otteniamo la matrice a scalini con due pivot

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-4} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nessun pivot è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema di equazioni lineari è compatibile. Abbiamo due pivot e tre incognite, per cui avremo infinite soluzioni: una variabile sarà libera (ad esempio x_3, che non ha pivot), e le altre due saranno determinate dalle equazioni.

Il sistema dato dalla matrice a scalini, equivalente a quello iniziale, è

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -4x_2 - x_3 & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Possiamo assegnare a x_3 un valore arbitrario, ad es. $s_3 \in \mathbb{R}$, e ricaviamo allora

$$\begin{aligned} x_3 &= s_3 \\ x_2 &= -\tfrac{1+s_3}{4} \\ x_1 &= 2x_2 = -\tfrac{1+s_3}{2} \end{aligned}$$

Scriviamo allora l'insieme delle soluzioni come

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1+s_3}{2} \\ -\frac{1+s_3}{4} \\ s_3 \end{pmatrix} \middle| \; s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ ha soluzioni *non nulle* il seguente sistema in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$BX = \lambda X$$

(Nota: non si richiede di trovare le soluzioni.)

Soluzione esercizio 3. Il sistema può essere riscritto nella forma

$$(B - \lambda I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità 3×3. Il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se il rango di $B - \lambda I$ è minore del numero di incognite, cioè 3. In altre parole, se e solo se

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Calcoliamo allora il determinante di $B - \lambda I$, che è

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (2-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2$$

Quindi il sistema originario ha soluzioni non nulle per quei valori di λ per cui

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0$$

Per trovare le radici del polinomio, proviamo intanto con i fattori del termine noto: $\pm 1, \pm 2$. Troviamo che $\lambda_1 = 2$ è una radice. Allora possiamo dividere per $\lambda - 2$, ottenendo

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

Le altre due radici sono quindi le radici di $-\lambda^2 - 4\lambda + 1$, che sono

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{16+4}}{-2} = -2 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Quindi il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $\lambda = 2$, oppure $\lambda = -2+\sqrt{5}$, oppure $\lambda = -2-\sqrt{5}$.

Esercizio 4. Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. La matrice A_1 ha il minore M 1×1 in alto a sinistra invertibile (cioè l'entrata uguale a -2 in alto a sinistra è diversa da 0). Allora il rango è 1 oppure 2. Per il teorema degli orlati, possiamo considerare anche solo i minori orlati di M, cioè i minori 2×2 per cui prendo la prima riga (e un'altra delle due rimanenti). Abbiamo

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

I determinanti sono entrambi nulli, per cui $\mathrm{rg}(A_1) = 1$.

La matrice A_2 ha determinante nullo, e un minore 2×2 invertibile, ad esempio quello in cui elimino la seconda riga e la seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Segue: $\mathrm{rg}(A_2) = 2$.

La matrice A_3 ha diversi minori 2×2 invertibili, dobbiamo allora controllare i minori 3×3. Da dove iniziare? Anche se cè la possibilità che il rango sia 3, conviene fissare un minore N 2×2 invertibile, e calcolare i determinanti dei suoi orlati. Infatti, se ne troviamo uno $\neq 0$, allora il rango è 3. Se tutti i determinanti degli orlati di N invece sono 0, allora per il teorema sappiamo che il rango è 2. Fissiamo allora ad esempio N uguale al minore in cui scelgo le prime due righe e le ultime due colonne:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iniziamo a considerare i suoi orlati, ad esempio prendiamo le ultime tre colonne (e tutte le righe): il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Quindi il rango è 3.

Esercizio 5. Calcolare il rango del tabellone della tombola:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \dots & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & \dots & 28 & 29 & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 71 & 72 & 73 & \dots & 78 & 79 & 80 \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 88 & 89 & 90 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. Sottraendo la prima riga da tutte le altre otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & \dots & 20 & 20 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 70 & 70 & 70 & \dots & 70 & 70 & 70 \\ 80 & 80 & 80 & \dots & 80 & 80 & 80 \end{pmatrix}$$

Sottraendo $(j-1)$ volte la seconda riga dalla j-esima, con $j \in \{3, \dots, 9\}$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono solo due righe non completamente nulle, quindi il rango è al massimo 2. Il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 20 = -10 \neq 0$$

per cui il rango è 2.

Esercizio 6. Determinare se le tre k-uple di vettori seguenti sono linearmente dipendenti, e, se sì, determinare una relazione di dipendenza lineare fra di essi.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 6. Consideriamo prima v_1 e v_2. Costruiamo la matrice $\mathrm{Mat}(v_1, v_2)$ che ha essi per colonne:

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2, infatti il minore 2×2 costituito dalle prime due righe ha determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Quindi il rango non è inferiore al numero di vettori: segue che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esaminiamo w_1, w_2, w_3. Si tratta di 3 vettori colonna di $\mathbb{R}^2$, per cui sono linearmente dipendenti. Una relazione di dipendenza lineare sarà data trovando tre coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esplicitando w_1, w_2, w_3, si trova che $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ sarà una soluzione non tutta nulla del sistema di equazioni lineari seguente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0, \\ -2x_1 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Scritto in forma matriciale è

$$\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3) \cdot X = O$$

dove $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e poniamo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, e $\mathrm{Mat}(w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Non serve trovare tutte le soluzioni: è richiesta solo una soluzione non tutta nulla. Si trova facilmente senza fare molti conti: ad esempio $x_1 = 1$, $x_3 = 2$ (dedotto dalla seconda equazione), $x_2 = -8$ (dedotto dalla prima equazione). Questi sono allora i coefficienti di una relazione di dipendenza lineare, infatti si verifica facilmente che

$$w_1 - 8w_2 + 2w_3 = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine, consideriamo i vettori z_1, z_2, z_3. Si tratta di 3 vettori di $\mathbb{R}^3$, per cui sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice $\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3)$ che li ha per colonne è non invertibile. Abbiamo

$$\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det(\mathrm{Mat}(z_1, z_2, z_3)) = -2$$

per cui la matrice è invertibile. Deduciamo che i tre vettori z_1, z_2, z_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7. Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 - \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

e i vettori

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

Soluzione esercizio 7. I tre vettori, essendo elementi di $\mathbb{R}^3$, sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathrm{Mat}(v, w, z)$ è invertibile. Calcoliamone allora il determinante:

$$|\mathrm{Mat}(v, w, z)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 2(2 - \lambda) + 6\lambda = 7\lambda - 4$$

Il determinante è non nullo per ogni $\lambda \neq \frac{4}{7}$. Per questi valori di λ allora v, w, z sono linearmente indipendenti. Per $\lambda = \frac{4}{7}$ invece il determinante è nullo, per cui v, w, z sono linearmente dipendenti.

Esercizio 8. Sia A una matrice quadrata $p \times p$. Calcolare il determinante della matrice $-A$. Dimostrare inoltre che se p è dispari e A è antisimmetrica, allora A non è invertibile.

Soluzione esercizio 8. La matrice $-A$ si ottiene da A cambiando il segno ad una riga di A alla volta. Si tratta cioè di p operazioni elementari di riga del tipo $R_i \to (-1)R_i$, per cui il determinante viene moltiplicato per -1, un numero di volte uguale a p. Segue:

$$\det(-A) = (-1)^p \det(A)$$

Supponiamo ora p dispari e A antisimmetrica, cioè $A^t = -A$. Dalla formula ottenuta per $\det(-A)$ otteniamo in questo caso $\det(-A) = -\det(A)$. Mettendo insieme:

$$\underbrace{\det(A) = \det(A^t)}_{\text{uguaglianza vera sempre}} = \det(-A) = -\det(A)$$

per cui $\det(A) = 0$, cioè A non è invertibile.

Esercizio 9. Trovare due numeri interi positivi p, q, e due matrici A, B, entrambe $p \times q$, che hanno lo stesso rango ma B non si può ottenere da A tramite operazioni elementari di riga.

Soluzione esercizio 9. Ad esempio si può prendere $p = 1$ e $q = 3$: le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
e
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
hanno entrambe rango 1, ma B non si può ottenere da A tramite operazioni elementari di riga.

Esercizio 10. Si consideri un vettore colonna qualsiasi
$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
e il prodotto $P = C \cdot C^t$, che è una matrice 3×3.

(1) Dimostrare che $\det(P) = 0$.
(2) Dimostrare che[1] $\mathrm{rg}(P) \leq 1$.

Soluzione esercizio 10. Parte (1). Abbiamo
$$P = C \cdot C^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{pmatrix}$$
Il determinante si può calcolare con la solita formula
$$\det(P) = c_1^2c_2^2c_3^2 + c_1^2c_2^2c_3^2 + c_1^2c_2^2c_3^2 - c_1^2c_2^2c_3^2 - c_1^2c_2^2c_3^2 - c_1^2c_2^2c_3^2 = 0$$
Parte (2). Osserviamo che, nel caso $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, allora P è la matrice nulla, per cui $\mathrm{rg}(P) = 0$. Allora possiamo supporre che almeno uno fra c_1, c_2, c_3 sia $\neq 0$.

Supponiamo che almeno uno dei tre numeri c_1, c_2, c_3 sia nullo. Ad esempio, sia $c_1 = 0$. Allora abbiamo
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & c_2c_3 \\ 0 & c_2c_3 & c_3^2 \end{pmatrix}$$
Tutti i minori 2×2 di questa matrice hanno determinante nullo, infatti o hanno una riga o una colonna sicuramente nulla, oppure sono il minore nell'angolo in basso a destra, che ha determinante $c_2^2c_3^2 - c_2^2c_3^2 = 0$. Segue che $\mathrm{rg}(A) \leq 1$.

Allo stesso modo si dimostra che $\mathrm{rg}(A) \leq 1$ se $c_2 = 0$, oppure se $c_3 = 0$.

A questo punto possiamo supporre che tutti e tre i c_1, c_2, c_3 siano non nulli. Allora possiamo fare le operazioni di riga $R_1 \to \frac{c_3}{c_1} R_1$ e $R_2 \to \frac{c_3}{c_2} R_2$, ottenendo
$$\begin{pmatrix} c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{pmatrix}$$
Le operazioni di riga $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$ producono il risultato
$$\begin{pmatrix} c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
che è una matrice di rango 1, e ha lo stesso rango di P.

[1] La prima domanda è facile, invece questa seconda domanda è piuttosto difficile.