Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.2

12.10.2018

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

trovare le soluzioni dei seguenti sistemi in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$AX = 3X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ ha soluzioni *non nulle* il seguente sistema in forma matriciale, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$BX = \lambda X$$

(Nota: non si richiede di trovare le soluzioni.)

Esercizio 4. Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Calcolare il rango del tabellone della tombola:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \dots & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & \dots & 28 & 29 & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 71 & 72 & 73 & \dots & 78 & 79 & 80 \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 88 & 89 & 90 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Determinare se le tre k-uple di vettori seguenti sono linearmente dipendenti, e, se sì, determinare una relazione di dipendenza lineare fra di essi.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 - \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

e i vettori

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

Esercizio 8. Sia A una matrice quadrata $p \times p$. Calcolare il determinante della matrice $-A$. Dimostrare inoltre che se p è dispari e A è antisimmetrica, allora A non è invertibile.

Esercizio 9. Trovare due numeri interi positivi p, q, e due matrici A, B, entrambe $p \times q$, che hanno lo stesso rango ma B non si può ottenere da A tramite operazioni elementari di riga.

Esercizio 10. Si consideri un vettore colonna qualsiasi

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

e il prodotto $P = C \cdot C^t$, che è una matrice 3×3.

(1) Dimostrare che $\det(P) = 0$.
(2) Dimostrare che[1] $\mathrm{rg}(P) \leq 1$.

[1] La prima domanda è facile, invece questa seconda domanda è piuttosto difficile.