Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Soluzioni del foglio di esercizi n.1

Esercizio 1. Dire quali delle seguenti matrici è a scalini, e in caso affermativo evidenziarne i pivot.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 1. La prima matrice non è a scalini, infatti il 2 nella prima riga è il primo elemento non nullo della riga, sotto di esso tutti gli elementi sono nulli, ma c'è un elemento non nullo sotto allo 0 (della prima riga) che precede il 2. La seconda è a scalini, con un pivot:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La terza è a scalini, con due pivot:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La quarta non è a scalini, perché l'1 sulla terza riga è il primo elemento non nullo della riga, ma sotto di esso non tutti gli elementi sono nulli.

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione lineare

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -5.$$

Trovare i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che le componenti dell'elemento $(3 + \lambda, 2\lambda, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ sono una soluzione dell'equazione.

Soluzione esercizio 2. Sostituiamo le componenti alle variabili x_1, x_2 e x_3 rispettivamente, ottenendo

$$2(3 + \lambda) + 2\lambda - 1 = -5,$$

cioè

$$4\lambda = -12.$$

Deduciamo che le componenti di $(3 + \lambda, 2\lambda, 1)$ sono una soluzione dell'equazione data se e solo se $\lambda = -3$.

Esercizio 3. Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono compatibili, e in caso affermativo trovarne le soluzioni:

$$S_1) \begin{cases} 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - 3x_2 &= 0 \end{cases} \qquad S_2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ 5x_1 + x_2 &= 7 \end{cases}$$

$$S_3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \qquad S_4) \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 3. Risolviamo il sistema S_1. Abbiamo 3 incognite: x_1, x_2, x_3. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usiamo operazioni elementari di riga per trasformarla in una matrice a scalini. Scambiamo la prima e la seconda riga (cioè $R_1 \leftrightarrow R_2$), ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla terza riga la prima ($R_3 \to R_3 + R_1$), ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto la prima colonna è "a posto", secondo l'algoritmo di Gauß: inizia con un numero non nullo, e sotto ha solo zeri. Ignoriamo allora la prima colonna e la prima riga, e procediamo con la seconda colonna.

Sommiamo alla terza riga la seconda ($R_3 \to R_3 + R_2$), ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini. Ci sono 3 pivot, e l'ultimo è nella colonna dei termini noti:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Per questo il sistema *non è compatibile*, cioè non ha soluzioni. In simboli:

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \varnothing$$

(i.e. l'insieme delle soluzioni è vuoto).

Risolviamo il sistema S_2 con lo stesso metodo. Incognite: x_1, x_2. Matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Operazioni elementari di riga: non è necessario, ma è comodo scambiare prima di tutto R_1 con R_2, cioè $R_1 \leftrightarrow R_2$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

A qusto punto facciamo $R_2 \to R_2 - 3R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

e $R_3 \to R_3 - 5R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Prima colonna: ok. Usiamo ora $R_3 \to R_3 - 3R_2$, e otteniamo la matrice a scalini seguente, con 2 pivot:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il numero di pivot è uguale al numero di incognite. Per cui la soluzione è unica, ed è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & -1 \\ 2x_2 & = & 4 \\ 0x_1 + 0x_2 & = & 0 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema dato S_2. Troviamola risolvendo dal basso verso l'alto. La terza equazione può essere ignorata, la seconda implica $x_2 = 2$, e sostituendo questo valore nella prima otteniamo

$$x_1 - 2 = -1$$

cioè $x_1 = 1$. L'insieme delle soluzioni allora ha un solo elemento, che possiamo scrivere come vettore colonna con entrate 1 e 2. In simboli:

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sistema S_3. Incognite: x_1, x_2, x_3, x_4. Matrice completa, operazioni elementari di riga, pivot:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{3}{2} R_2 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & -\frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Tre pivot (nelle colonne di x_1, x_2, x_3 rispettivamente), nessuno nella colonna dei termini noti, quattro incognite: quindi abbiamo infinite soluzioni, che dipendono da un parametro ($1 = 4 - 3$). Come parametro possiamo prendere la variabile che non corrisponde a nessun pivot, cioè x_4. Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_3 - \frac{15}{2}x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Assegnamo ad x_4 un valore qualsiasi, diciamo $s_4 \in \mathbb{R}$, e ricaviamo le altre risolvendo dal basso verso l'alto:

$$\begin{array}{lcl} x_4 & = & s_4 \\ x_3 & = & 15s_4 \\ x_2 & = & \frac{-x_3 - 5s_4}{2} = \frac{-15s_4 - 5s_4}{2} = -10s_4 \\ x_1 & = & 1 + 2x_2 = 1 - 20s_4 \end{array}$$

L'insieme delle soluzioni allora è

$$\mathrm{Sol}(S_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 20s_4 \\ -10s_4 \\ 15s_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \middle| s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sistema S_4. Incognite: x_1, x_2, x_3, x_4. Matrice completa, operazioni elementari di riga, pivot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Quattro incognite, due pivot, nessuno nella colonna dei termini noti: abbiamo infinite soluzioni, che dipendono da due parametri. Ad esempio prendiamo x_3 ed x_4 come parametri (cioè "libere"), e ricaviamo le altre.

Il sistema equivalente che abbiamo ottenuto è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \end{cases}$$

Assegnamo ad x_3 ed x_4 valori arbitrari, diciamo $s_3, s_4 \in \mathbb{R}$, e risolviamo dal basso verso l'alto:

$$\begin{array}{lcl} x_4 & = & s_4 \\ x_3 & = & s_3 \\ x_2 & = & 3 - 2x_3 - 3x_4 = 3 - 2s_3 - 3s_4 \\ x_1 & = & x_2 + x_3 - 2x_4 = (3 - 2s_3 - 3x_4) + s_3 - 2s_4 = 3 - s_3 - 5s_4 \end{array}$$

L'insieme delle soluzioni allora è

$$\mathrm{Sol}(S_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - s_3 - 5s_4 \\ 3 - 2s_3 - 3s_4 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \middle| s_3, s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 4. Trovare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare

$$S_5) \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + \alpha x_2 & = & 0 \\ (1-\alpha)x_1 - x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

è compatibile.

Soluzione esercizio 4. La matrice completa del sistema è

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ (1-\alpha) & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A seconda del valore di α, la matrice potrebbe essere a scalini oppure no. Possiamo però ridurla ad una forma sicuramente a scalini con l'operazione $R_2 \to R_2 - \frac{1-\alpha}{2} R_1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 - \frac{1-\alpha}{2}\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

che è uguale a

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è sicuramente a scalini, per qualsiasi valore di α. I pivot sono due, ma attenzione: per tutti i valori di α per cui $\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} \neq 0$, i pivot sono

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \alpha & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nessuno dei due è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema è compatibile.

Se invece $\frac{-2-\alpha+\alpha^2}{2} = 0$, cioè per $\alpha = -1$ oppure per $\alpha = 2$, la matrice allora si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I pivot sono sempre 2, ma sono

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Uno dei pivot qui è nella colonna dei termini noti, per cui il sistema è incompatibile.

Esercizio 5. Dire quando i prodotti AB, BA, $A'B'$ e $B'A'$ sono definiti, e in caso affermativo calcolarli, per le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 5. La matrice A è 2×3 e la matrice B è 2×2. Quindi il prodotto AB *non* è definito, mentre il prodotto BA è definito ed è una matrice 2×3:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le matrici A' e B' sono 3×3, per cui entrambi i prodotti $A'B'$ e $B'A'$ sono definiti. Valgono

$$A'B' = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & -8 & 13 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Trovare le matrici inverse, se esistono, delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 6. Calcoliamo i determinanti:

$$\det(A_1) = 1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-1) = -2,$$

$$\det(A_2) = 3 \cdot 15 - (-9) \cdot (-5) = 45 - 45 = 0.$$

Allora A_1 è invertibile, e A_2 no. Abbiamo

$$A_1^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Trovare i valori del parametro β per cui la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3\beta & 1 \\ \beta - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Soluzione esercizio 7. La matrice A_3 è invertibile se e solo se il suo determinante è $\neq 0$. Il determinante è

$$\det(A_3) = 3\beta \cdot (-1) - 1 \cdot (\beta - 1) = -4\beta - 1,$$

ed è $\neq 0$ se e solo se $\beta \neq -\frac{1}{4}$.

Esercizio 8. Trovare le matrici inverse, se esistono, delle matrici

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 8. Calcoliamo il determinante di A_4:

$$\det(A_4) = 3 \cdot 4 \cdot 4 + (-9) \cdot (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-2) - (-9) \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) \cdot 0 =$$
$$= 48 - 54 + 8 = 2$$

Allora A_4 è invertibile. Per calcolare l'inversa, calcoliamo le matrici aggiunte di ogni elemento, e mettiamole in una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 8 \\ -36 & 14 & -18 \\ 23 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

Facciamo la trasposta, e cambiamo i segni secondo il solito schema

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 16 & 36 & 23 \\ 6 & 14 & 9 \\ 8 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

Questa matrice, diviso il determinante di A_4, è l'inversa di A_4. Cioè

$$A_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 36 & 23 \\ 6 & 14 & 9 \\ 8 & 18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & \frac{23}{2} \\ 3 & 7 & \frac{9}{2} \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice A_5 è triangolare superiore, per cui il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Cioè

$$\det(A_5) = 1.$$

Lo stesso procedimento di prima ottiene

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 9. Il sistema è in forma matriciale, e osserviamo che la matrice che dà i coefficienti è la matrice A_4 dell'esercizio precedente. In altre parole il sistema è

$$A_4 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta allora moltiplicare a sinistra entrambi i membri per A_4^{-1}, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_4^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & \frac{23}{2} \\ 3 & 7 & \frac{9}{2} \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Sia data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutte le matrici 2×2 che commutano con C, cioè tutte le matrici D tali che $CD = DC$.

Soluzione esercizio 10. Scriviamo una matrice D con delle incognite al posto delle entrate:

$$D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Allora la condizione $CD = DC$ si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -x+z & -y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 2z-w & w \end{pmatrix}$$

Due matrici sono uguali se e solo se tutte le loro entrate sono uguali, per cui l'equazione qui sopra si può scrivere come un sistema:

$$\begin{cases} 2x & = & 2x-y \\ 2y & = & y \\ -x+z & = & 2z-w \\ -y+w & = & w \end{cases}$$

Portiamo tutte le variabili al primo membro:

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ -x-z+w & = & 0 \\ -y & = & 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile: abbiamo $y = 0$, e possiamo ricavare ad esempio x in funzione di z e w. In altre parole

$$\begin{array}{rcl} x & = & -z+w \\ y & = & 0 \end{array}$$

Assegnamo valori arbitrari a z e w, diciamo numeri reali rispettivamente $s, t \in \mathbb{R}$, e concludiamo che le matrici D che commutano con C sono tutte le matrici della forma

$$D = \begin{pmatrix} t-s & 0 \\ s & t \end{pmatrix}$$

per valori arbitrari $s, t \in \mathbb{R}$. Come al solito, possiamo scrivere l'insieme di queste matrici nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t-s & 0 \\ s & t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$