Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.11

13.12.2018

Esercizio 1. Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contenente i punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ passante per i punti

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Siano p e q come nell'esercizio precedente. Calcolare la distanza fra il punto medio del segmento fra p e q e il piano π di equazione

$$x + y + 1 = 0$$

Esercizio 4. Trovare un vettore direttore della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ 2x + z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x & = & 3t + 1 \\ y & = & t \\ z & = & -1 \end{cases}$$

Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contenente r e il punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Determinare la distanza fra la retta r e la retta s, dove r ed s sono date dalle seguenti equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x & = & t - 2 \\ y & = & t + 1 \\ z & = & -3t \end{cases}$$

$$s\colon \begin{cases} x & = & 2t \\ y & = & -t + 2 \\ z & = & -3t - 1 \end{cases}$$

Esercizio 7. Calcolare la proiezione ortogonale del punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sulla retta $r \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y - 2 & = & 0 \\ x + z + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslazione per il vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione (lineare) ortogonale di matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Sia $h = f \circ g$, e dato

$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

scriviamo

$$h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Scrivere una matrice A tale che

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove A è 3×3.

Scrivere anche una matrice B tale che

$$\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove poniamo $k = g \circ f$ e scriviamo

$$k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslazione per il vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e sia $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione ortogonale di matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia $\varphi = g \circ f \circ g^{-1}$. Dimostrare che anche φ è una traslazione per un qualche vettore w_0. Determinare w_0.

Esercizio 10. Siano f e g come nell'esercizio precedente. Dimostrare che invece $\psi = f \circ g \circ f^{-1}$ non è un'applicazione (lineare) ortogonale.