

## Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Foglio di esercizi n.10

7.12.2018

**Esercizio 1.** Sia  $r \subset \mathbb{R}^2$  la retta affine che contiene i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di  $r$ .

**Esercizio 2.** Determinare i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per cui le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele, dove  $r$  non dipende da  $k$  ed è data dalle equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

mentre  $s$  dipende da  $k$  ed è data dall'equazione cartesiana

$$s: -3x + ky + 1 = 0$$

Determinare l'intersezione di  $r$  ed  $s$  per tutti gli altri valori di  $k$ .

**Esercizio 3.** Trovare la proiezione ortogonale di

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sulla retta  $r$  di equazione

$$r: x - y + 2 = 0$$

**Esercizio 4.** Trovare la distanza fra il punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e la retta  $r$ , dove  $r$  è la retta che passa per

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ed è perpendicolare alla retta  $s$  di equazioni parametriche

$$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

**Esercizio 5.** Trovare le rette parallele alla retta  $s$  di equazione cartesiana

$$s: 2x + y - 1 = 0$$

e tali che la distanza della retta dal punto

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

**Esercizio 6.** Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra la retta  $r$  di equazione cartesiana

$$r: x + 2y - 1 = 0$$

e la retta  $s$ , di equazione cartesiana

$$s: -x + y = 0$$

dove l'angolo  $\varphi$  soddisfa  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Esercizio 7.** Trovare tutti i punti che hanno distanza  $\sqrt{5}$  dal punto

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che giacciono sulla retta

$$r: x - y + 2 = 0$$

**Esercizio 8.** Siano dati i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} k-1 \\ -2k \end{pmatrix}$$

dove il punto  $r$  dipende da un parametro  $k \in \mathbb{R}$ . Trovare i valori di  $k$  per cui  $p, q, r$  sono allineati (se esistono).

**Esercizio 9.** Usando la *disuguaglianza triangolare*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

che abbiamo già visto (conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) e che vale per ogni  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , dimostrare la disuguaglianza

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

che vale per ogni  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , e anch'essa nota come *disuguaglianza triangolare*.

**Esercizio 10.** Siano  $U, W$  sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$ . Dimostrare che, **se vale**  $U \cap W \neq \emptyset$ , allora l'intersezione  $U \cap W$  è un sottospazio affine, e vale

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \leq n$$

Trovare un esempio di sottospazi affini  $U, W$  tali che  $U \cap W = \emptyset$ .