Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 6.11.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia. **Attenzione:** le risposte *non sufficientemente motivate*, o quelle che *contengono solo conti senza spiegazioni*, **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare.

Esercizio 1. (*scrivere solo i risultati*) Dato lo spazio vettoriale delle matrici due per due $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ si consideri l'applicazione lineare $f \colon V \to V$ definita da

$$f(X) = X - 2X^t$$

Si consideri inoltre la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base "canonica" $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (2 punti)

b) Si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una di $\mathrm{Im}(f)$. (3 punti)

c) Si trovi una descrizione parametrica dell'insieme delle matrici X tali che

$$f(X) = A \cdot \mathrm{Tr}(X)$$

(2 punti)

Esercizio 2. (*scrivere solo i risultati*) Nello spazio sono dati la retta $r \colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi \colon x + 2y - z = 0$.

a) Sia ρ la retta perpendicolare a π passante per il punto $(1, 2, 1)$, si dica se r e ρ sono parallele, sghembe o incidenti. (4 punti)

b) Trovare le equazioni cartesiane della retta r_1 proiezione ortogonale di r su π. (3 punti)

Esercizio 3. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Siano $U \in \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x + 3y - z + w = 0$, W il sottospazio generato dai vettori

$$(0, 1, 3, 2)^t,\ (0, 1, 3, 1)^t,\ (2, 1, 3, -1)^t$$

a) Si trovi una base di $U \cap W$ e una base di $(U \cap W)^\perp$ (3 punti)
b) Si trovino le equazioni cartesiane di W (2 punti)
c) Si scriva, se possibile in due modi diversi, il vettore $(3, 2, 1, 0)^t$ come somma di un vettore in U e uno in W. (3 punti)

Esercizio 4. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2t-1 & t & -2t \\ -6 & -1 & 6 \\ 2t-3 & t & 2-2t \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$.

(1) Si trovino gli autovalori di A. (1 punto)
(2) Si trovino tutti i valori di t per cui A è diagonalizzabile. (4 punti)
(3) Si assegni al parametro t uno qualunque dei valori per cui A è diagonalizzabile. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A? Se sì, trovarne una, altrimenti spiegare perché non esiste. (3 punti)