

Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 17.9.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia. **Attenzione:** le risposte *non sufficientemente motivate*, o quelle che *contengono solo conti senza spiegazioni*, **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare. Segnare in basso sul retro del foglio eventuali date nelle quali per **VALIDI MOTIVI** non si disponibili per sostenere l'esame orale.

Esercizio 1. (*scrivere solo i risultati*) Sia data la conica γ di equazione $x^2 - 6xy - 7y^2 + 3x - y - \frac{3}{4} = 0$.

(1) Si trovi l'equazione canonica di γ . (3 punti)

(2) Si scriva il cambiamento di coordinate corrispondente, esprimendo in termini di x, y le coordinate del riferimento affine in cui γ ha equazione canonica. (4 punti)

Esercizio 2. (*scrivere solo i risultati*) Data la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

(1) Si scriva la matrice di B rispetto alla base canonica e si mostri che si tratta di una forma definita positiva, quindi di un prodotto scalare. (4 punti)

(2) Partendo dai vettori della base canonica, trovare una base ortonormale del piano $L[\underline{e}_2, \underline{e}_3]$ rispetto a questo prodotto. (*Suggerimento: abbiamo visto l'algoritmo di Gram-Schmidt per il prodotto scalare standard, ma funziona allo stesso modo per qualsiasi prodotto scalare. Però c'è anche un metodo più semplice...*) (3 punti)

Esercizio 3. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 2x + y \\ -x + y - 3z \end{pmatrix}$$

e sia U il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito dal sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

- (1) Si dimostri che U è contenuto nel nucleo di f . (2 punti)
- (2) Si trovi una base della somma $U + \text{Im}(f)$. Si tratta di una somma diretta? (3 punti)
- (3) Si trovi una descrizione parametrica dell'insieme dei vettori v di \mathbb{R}^3 tali che $v - f(v) \in U$. (3 punti)

Esercizio 4. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Siano dati i tre punti dello spazio $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (-1, 2, -3)$.

- (1) Determinare l'equazione cartesiana del piano che li contiene. (2 punti)
- (2) Si scriva un'equazione parametrica del luogo dei punti equidistanti da A, B, C . (3 punti)
- (3) Esiste una sfera di raggio 5 passante per A, B e C ? Se sì, dire quante ce ne sono e determinare le coordinate dei loro centri, altrimenti dimostrare che una tale sfera non esiste. (3 punti)