A

Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 16.7.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia. **Attenzione:** le risposte *non sufficientemente motivate*, o quelle che *contengono solo conti senza spiegazioni*, **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare.

Esercizio 1. (*scrivere solo i risultati*) Sia dato il seguente sistema di equazioni lineari nelle variabili x, y, z, w, dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S\colon \begin{cases} x - y + 2z &= -k \\ -kx + ky &= 1 \\ y + z - kw &= 0 \end{cases}$$

(1) Si trovino i valori di k per cui il sistema S è compatibile. (3 punti)

(2) Per tali valori di k, si descriva l'insieme delle soluzioni di S. (4 punti)

Esercizio 2. (*scrivere solo i risultati*) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) Si trovino gli autovalori e basi degli autospazi. (4 punti)

(2) Si scriva la matrice canonica dell'inversa di f. (3 punti)

Esercizio 3. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sia dato il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1) Si verifichi che il vettore v appartiene a U, e si trovi una descrizione parametrica dell'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^4$ aventi proiezione ortogonale su U uguale a v. (4 punti)
(2) Si trovi una base ortogonale di U, e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$. (4 punti)

Esercizio 4. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Dati i punti

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) Si trovino equazioni cartesiane della retta r per P, Q. (2 punti)
(2) Si trovi la retta r_1 proiezione ortogonale di r sul piano $\pi\colon 3x - 4y + 5z - 2$ e il punto O intersezione di r_1 e π. (3 punti)
(3) Si trovino punti $A \in r$, $B \in r_1$ tale che il triangolo AOB sia retto con area $30\sqrt{2}$. (3 punti)